Chapitre 2
NOMBRES COMPLEXES

Enoncé des exercices

1 Les basiques

Exercice 2.1 *Donner la forme polaire de :* $1+i,\ 1-i,\ i-1,\ \sqrt{3}+i$
En déduire

$$\frac{(i-1)^5}{(i+1)^4},\ (1+i)^{44},\ \left(\frac{-4}{\sqrt{3}+i}\right)^{19}$$

Exercice 2.2 *Calculer* $(1+i)^{25}$ *et* $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

Exercice 2.3 *Soit* $z_1=1+i$, $z_2=\sqrt{3}+i$ *et* $z_3=\dfrac{z_1}{z_2}$, *Déterminer les parties réelles et imaginaire de* z_3, *déterminer les modules et arguments de* z_1 *et* z_2, *en déduire la forme polaire de* z_3. *Justifier alors que* $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ *et* $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. *En déduire* $\tan\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 2.4 *Soient* a,b *et* c *dans* $\mathbb{C}$, *montrer que*

$$|1+a|+|a+b|+|b|\geq 1$$

Exercice 2.5 *Soit* z *un complexe de module* 1, *calculer* $|1+z|^2+|1-z|^2$.

Exercice 2.6 *Un entier* n *est dit somme de deux carrés s'il existe deux entiers* a *et* b *tels que* $n=a^2+b^2$. *Montrer que si* n *et* p *sont sommes de deux carrés alors leur produit* $n\times p$ *l'est aussi.*
Par exemple on a $5=2^2+1^2,\ 401=20^2+1^2$, *quelle est la décomposition en somme de deux carrés de* 2005 *?*

Exercice 2.7 *Résoudre* $z^4=\dfrac{16\sqrt{2}}{1-i}$*(on demande uniquement la forme polaire des solutions)*

Exercice 2.8 *Montrer que* $(|z|=1$ *et* $z\neq 1)\Rightarrow i\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)\in\mathbb{R}$

Exercice 2.9 *Soient* a *et* b *deux nombres complexes de module* 1 *tels que* $ab\neq -1$, *montrer que* $\dfrac{a+b}{1+ab}\in\mathbb{R}$.

Exercice 2.10 *Soient a et b deux complexes tels que $a\overline{b}\neq 1$, on pose alors $z=\dfrac{a-b}{1-a\overline{b}}$. Montrer que*

$$|z|=1\Leftrightarrow |a|=1 \text{ ou } |b|=1$$

Exercice 2.11 *Soient a et b deux complexes non nuls. Montrer que* $\left|\dfrac{a}{|a|^2}-\dfrac{b}{|b|^2}\right|=\dfrac{|a-b|}{|a|\,|b|}$

Exercice 2.12 *Soient a,b et c trois complexes de module 1, montrer que $|ab+bc+ca|=|a+b+c|$*

Exercice 2.13 *Soit u un nombre complexe de module 1, montrer que* $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{1-u}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2.14 *Résoudre l'équation $z^3=\overline{z}$.*

Exercice 2.15 *Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison a où a est un imaginaire pur non nul. Montrer que si M_n a pour affixe z_n alors le triangle $(M_nM_{n+1}M_{n+2})$ est rectangle en M_{n+1}.*

Exercice 2.16 *Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que les points $M(z)$, $N(z^2)$ et $P\left(\dfrac{1}{z}\right)$ soient alignés.*

Exercice 2.17 *Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que les points M, A et N soient alignés, où A a pour affixe 1 et N a pour affixe $1+z^2$.*

Exercice 2.18 *Résoudre, pour $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, l'équation $(z-i)^n=1$.*

Exercice 2.19 *Résoudre l'équation $(z-1)^n=(z+1)^n$ où $n\in\mathbb{N}^*$.*

Exercice 2.20 *Déterminer les solutions de $z^4-(3+8i)z^2-16+12i=0$*

Exercice 2.21 *Résoudre $\left(z^2+3z-2\right)^2+\left(2z^2-3z+2\right)^2=0$.*

Exercice 2.22 *Résoudre l'équation $z^3+z^2+(-1+3i)\,z+44+12i=0$ sachant qu'elle admet une racine réelle.*

Exercice 2.23 *On considère l'équation*

$$z^3-(1+2i)\,z^2+3\,(1+i)\,z-10\,(1+i)=0 \qquad (E)$$

1. *Résoudre (E) sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.*
2. *On note a,b et c les trois racines et A,B,C les points d'affixes a,b et c. Que dire du triangle (ABC) ?*

Exercice 2.24 *On considère la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par*

$$\forall z\in\mathbb{C},\ z\neq\ ,\ f(z)=\frac{z-2}{z+i}$$

1. *Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)|=1$*
2. *Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z)\in\mathbb{R}$*
3. *Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z)\in i\mathbb{R}$*

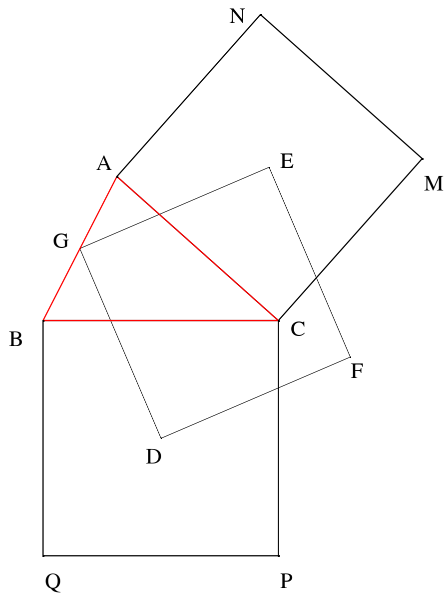
Exercice 2.25 *Soit $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$, montrer l'équivalence*

$$\lambda\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow\left|\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right|=1$$

Exercice 2.26 *Soit r_1 la rotation de centre A d'affixe -1 et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre B d'affixe $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. Montrer que $r_2 \circ r_1$ est une symétrie centrale dont on précisera l'affixe du centre.*

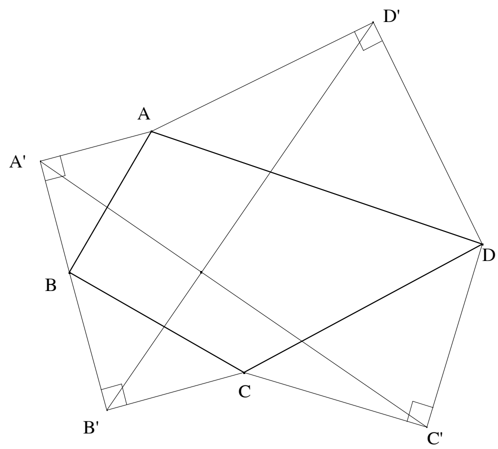
Exercice 2.27 1. *Soit $(ABCD)$ un quadrilatère. On note A', B', C' et D' les milieux des côtés $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$ et $[D, A]$. Montrer que $A'B'C'D'$ est un parallélogramme, dit parallélogramme de Varigon de $(ABCD)$*

2. *On construit sur les côtés du triangle (ABC) les carrés $(BCPQ)$ et $(ACMN)$ comme indiqué sur la figure ci dessous*



On note D et E les centres respectifs de ces carrés. On note G le milieu de$[A, B]$ et F le milieu de $[M, P]$. Montrer que $(EGDF)$ est un carré.

Exercice 2.28 *Soient A, B, C et D les sommets d'un quadrilatère convexe. On construit sur les côtés quatre triangles isocèles rectangles comme indiqué sur le schéma ci dessous.*



Montrer que $A'C' = B'D'$ et que ces deux segments forment un angle droit.

Exercice 2.29 *Résoudre $z^4 = 24i - 7$.*

Exercice 2.30 *Résoudre* $(z-i)^n = z^n$

Exercice 2.31 *Soient* a, b *et* c *trois complexes de module* 1 *tels que* $ac \neq -1$, *montrer que* $\dfrac{(c-b)(1+ab)}{b(1+ac)}$ *est un imaginaire pur.*

Exercice 2.32 *Soit* (ABC) *un triangle,* A', B' *et* C' *les milieux des côtés (* A' *milieu de* $[B,C]$, B' *milieu de* $[A,C]$ *et* C' *milieu de* $[A,C]$*) et* M *d'affixe* z*. On note* a, b, c *les affixes de* A, B *et* C*.*
Déterminer les affixes p, q *et* r *de* P, Q, R *symétriques de* M *par rapport à* A', B' *et* C'*. Montrer que les droites* (AP), (BQ) *et* (CR) *sont concourantes en un point* N *qui est le milieu de* $[A,P]$, $[B,Q]$ *et* $[C,R]$*. Reconnaître l'application* $M \longmapsto N$*.*

Exercice 2.33 *Résoudre, pour* $n \geq 2$, $(z-1)^n = z^n$, *montrer que les points d'affixes les solutions sont tous sur une droite parallèle à l'axe* Oy *et ceci quelque soit la valeur de* n*. Donner explicitement les solutions lorsque* $n = 2, 3$ *et* 4*.*

Exercice 2.34 *Résoudre, pour* n *entier,* $n \geq 2$ *l'équation* $(E) : (z+i)^n = z^n$*.*

Exercice 2.35 *Soit* $\alpha \in [0, 2\pi[$, *on considère l'équation*

$$z^2 - 2^{\alpha+1}\cos(\alpha)\, z + 2^{2\alpha} = 0$$

1. *Résoudre cette équation, on notera* z_1 *et* z_2 *les solutions.*
2. *Soient* A *et* B *les points d'affixe* z_1 *et* z_2 *et* O *le point d'affixe* 0, *déterminer* α *pour que le triangle* OAB *soit équilatéral.*

Exercice 2.36 *Soit* ω *un complexe fixé.*

1. *Déterminer les complexes* z *tels que*

$$z^2 + (2+i\omega)\, z + (i\omega + 2 - \omega) = 0$$

   On notera z_1 *et* z_2 *les deux solutions.*
2. *Déterminer le lieu géométrique des complexes* ω *tels que les points* M, A, B *d'affixes* ω, z_1, z_2 *respectivement soient alignés.*

Exercice 2.37 *Soient* $(a,b) \in \mathbb{C}$ *de module* 1 *tels que* $|a+b| = \sqrt{3}$, *calculer* $|a-b|$*. Donner un exemple de couple de complexe vérifiant cette condition.*

Exercice 2.38 *Montrer que* $\forall z$ *tel que* $|z| \neq 1$, *on a*

$$\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right| \leq \frac{1-|z|^n}{1-|z|}$$

Exercice 2.39 *Soient* $z_1, \cdots, z_n$ n *complexes de modules* 1, *on définit* $z = \left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}\right)$, *montrer que* z *est un réel tel que* $0 \leq z \leq n^2$*.*

Exercice 2.40 *Soit* $z \in \mathbb{C}$, *exprimer* $\operatorname{Re}(z^2)$ *en fonction de* $|z|$ *et de* $\operatorname{Re}(z)$*.*

Exercice 2.41 *Calculer les racines deuxièmes de* $1+i$ *sous forme polaire, en déduire* $\cos\dfrac{\pi}{8}$ *et* $\sin\frac{\pi}{8}$ *et* $\tan\frac{\pi}{8}$*.*

Exercice 2.42 *Résoudre* $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$ *où* $z \in \mathbb{C}$*.*

Exercice 2.43 *Soit* (ABC) *un (vrai) triangle,* Q *le milieu de* $[A,C]$ *et* R *le milieu de* $[A,B]$*. On note* a, b, c *les longueurs des côtés opposés respectivement à* A, B *et* C*. Montrer que* $(BQ) \perp (CR) \Longleftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$

Exercice 2.44 *Soit* $D = \left\{z \in \mathbb{C},\ \left|z - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\}$ *et* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par* $f(z) = z(1-z)$, *montrer que* D *est stable par* f *(i.e. que* $z \in D \Longrightarrow f(z) \in D$*).*

 Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

2 Les techniques

Exercice 2.45 *Soient a et b deux complexes, montrer que*

$$|a|+|b|\leq|a+b|+|a-b|$$

Exercice 2.46 *Soit a et b de module 1 et $z\in\mathbb{C}$, montrer que*

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z+ab\overline{z}-a+b}{a-b}\right)=-1$$

Exercice 2.47 *Soit $a\in\mathbb{C}$ de module 1, on note $z_1,z_2,..,z_n$ les solutions de l'équation $z^n=a$. Montrer que les point M_k d'affixe $(1+z_k)^n$ sont alignés*

Exercice 2.48 *Soit $z\in\mathbb{C}$, on définit $z'=\dfrac{iz}{z-2i}$ lorsque $z\neq 2i$. On note M,M',A,B les points d'affixe $z,z',2i,i$ respectivement.*

1. *Calculer $AM\times BM'$. Si M décrit un cercle de centre A et de rayon R, quel est le lieu de M' ?*
2. *Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{AM}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{BM'}}\right)$. En déduire que si M décrit une droite passant par A (privée de A), alors M' décrit une droite passant par B.*

Exercice 2.49 *Soit $z\in\mathbb{C}$, on note M le point d'affixe z, P le point d'affixe z^2 et Q le point d'affixe z^3. Déterminer le lieu de M pour que*

1. *M,P et Q soient alignés.*
2. *M,P et Q forment un triangle équilatéral.*

Exercice 2.50 *Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|1+z|<\dfrac{1}{2}$, montrer que $\left|1+z^2\right|>1$*

Exercice 2.51 *Soit z de module 1 et tel que $|1+z|<1$. Montrer que $\left|1+z^2\right|>1$.
En déduire que si u et v sont deux complexes de même module supérieur à 1 alors $|u+v|\geq 1$ ou $\left|u^2+v^2\right|>1$.*

Exercice 2.52 *Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4$ tel que $\begin{cases}a+c=b+d\\ a+ib=c+id\end{cases}$, on place les points $A(a),B(b),C(c)$ et $D(d)$. Donner la nature du quadrilatère $ABCD$. Montrer qu'il existe z tel que $(z-a)^4=(z-b)^4=(z-c)^4=(z-d)^4$.*

Exercice 2.53 *On considère l'équation (E) $z^3+(a-3i)\,z-1-3i=0$. Déterminer $a\in\mathbb{R}$ pour qu'elle admette une solution réelle. Déterminer alors les solutions.*

Exercice 2.54 *Soit ABC un triangle, on note r_A,r_B et r_C les rotations de centre A,B et C et de même angle $\dfrac{\pi}{3}$. Justifier que la transformation $r_C\circ r_B\circ r_A$ est une symétrie centrale. On note I le milieu de $[B,C]$, comment doit être le triangle ABC pour que le centre de cette rotation soit le milieu de $[B,I]$?*

Exercice 2.55 *Soient A,B et C les points d'affixe a,b et c respectivement. Montrer que le triangle (ABC) est équilatéral si et seulement si $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$.*

Exercice 2.56 *Soient A,B et C trois points du plan, on place l'origine O du plan au centre du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ à (ABC). Ainsi 0 est l'affixe de O. On note a,b et c les affixes de A,B et C.*

1. *Montrer que l'affixe de l'orthocentre H de (ABC) est $a+b+c$.*
2. *(Olympiades de St Petersbourg 1997).
Soient D un point de $\mathcal{C}$, on note K,L,M et N les milieux de $[A,B]$, $[B,C]$, $[C,D]$ et $[D,A]$. Montrer que les orthocentres des triangles (AKN), (BKL), (CLM) et (DMN) sont les sommets d'un parallélogramme.
(Questions supplémentaires : comparer les isobarycentres et les aires de $(ABCD)$ et de ce parallélogramme)*

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

Exercice 2.57

1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+2i)z - 1 + i = 0$. On notera z_1 et z_2 les solutions.*
2. *Pour n entier, $n \geq 2$, déterminer les racines énièmes de z_1 et de z_2.*
3. *Soit M_n le point d'affixe z_1^n, P_n le point d'affixe z_2^n et O l'origine du repère. Déterminer les entiers n tels que le triangle (OM_nP_n) soit rectangle.*

Exercice 2.58 *Soient u et v deux complexes, on définit z par $z = u + iv$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $|z|^2 = u^2 + v^2$.*

Exercice 2.59 *Résoudre l'équation d'inconnue z,*

$$\left(z^2+1\right)^n = (z-i)^{2n}$$

Exercice 2.60 *Trouver tous les complexes z tels que M d'affixe z et M_1, M_2, M_3 d'affixe les racines troisièmes de z forment un parallèlogramme.*

Exercice 2.61 *Soit ABC un triangle rectangle en C, soit P le pied de la hauteur issue de C, M le milieu de $[C,P]$ et N le milieu de $[B,P]$. Montrer que (AM) et (CN) sont perpendiculaires.*
On remarquera que deux triangles particuliers sont images par une similitude directe.

Exercice 2.62 *Soient a, b, c, d et α des complexes, développer $\left|a - \alpha\overline{b}\right|^2 + \left|c - \alpha\overline{d}\right|^2$, en déduire*

$$2\,\mathrm{Re}\left((ab+cd)\right) \leq 4\left(|a|^2+|c|^2\right) + \frac{1}{4}\left(|b|^2+|d|^2\right)$$

Plus généralement, montrer que

$$\mathrm{Re}\left(ab+cd\right) \leq \sqrt{\left(|a|^2+|c|^2\right)\left(|b|^2+|d|^2\right)}$$

Exercice 2.63 *Le but de cet exercice est de déterminer les complexes z tels que $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = 2$*

1. *Soit $y \in \mathbb{R}$, on définit le polynôme $P(X) = X^2 + 2\left(y^2-1\right)X + y^4 - 6y^2 + 1$. Déterminer les racines de P (i.e. résoudre $P(X) = 0$ d'inconnue X).*
2. *En déduire la factorisation de $P(X)$ en un produit de deux polynômes du premier degré en X.*
3. *Montrer que l'équation $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = 2$ est équivalente à $P\left(x^2\right) = 0$ avec $z = x + iy$ où x et y sont les parties réelles et imaginaires de z.*
4. *Représenter géométriquement l'ensemble des points M dont l'affixe vérifie $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = 2$.*

Exercice 2.64 *Soit $u = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{7}\right)$ et $S = u + u^2 + u^4$*

1. *Calculer $\overline{S}$ en fonction de u. En déduire $S + \overline{S}$ et $S\overline{S}$. Quel est le signe de $\mathrm{Im}(S)$?*
2. *Montrer que*

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Exercice 2.65 *Résoudre $z^8 - 2\left(i\sqrt{3}-1\right)z^4 - 8\left(1+i\sqrt{3}\right) = 0$.*

Exercice 2.66 *Soit $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, montrer que $a = \alpha^2 + \alpha^3$ et $b = \alpha + \alpha^4$ sont racines de $x^2 + x - 1$ et en déduire leur valeur.*

Exercice 2.67 *Soit p, un entier naturel non nul et l'équation en z suivante :*

$$(E_p) \quad : \quad pz^p = z^{p-1} + z^{p-2} + \cdots + z + 1 \text{ c'est à dire } pz^p = \sum_{k=0}^{p-1} z^k$$

1. *Une solution de (E_p) peut-elle être de module strictement supérieur à 1 ?*
2. *Soit $e^{i\theta}$, une solution de (E_p) de module 1, autre que 1, justifier l'égalité :*

$$e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}} = \frac{\sin(\frac{p\theta}{2})}{p\sin(\frac{\theta}{2})},$$

   puis en déduire une contradiction. Conclusion.

3 Les exotiques

Exercice 2.68 *Soit z un complexe tel que $\left|1 + z + z^2 + ... + z^9\right| = 1$ et $|z| = 1$. Montrer que $z^9 = 1$ ou $z^{11} = 1$.*

Exercice 2.69 *Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, en développant $(z + |z|)^2$, trouver une formule simple pour calculer les racines deuxièmes de z.*

Exercice 2.70 *On considère l'équation*

$$z^4 + (7 - i)\, z^3 + (12 - 15i)\, z^2 + (4 + 4\,i)\, z + 16 + 192\, i \qquad (E)$$

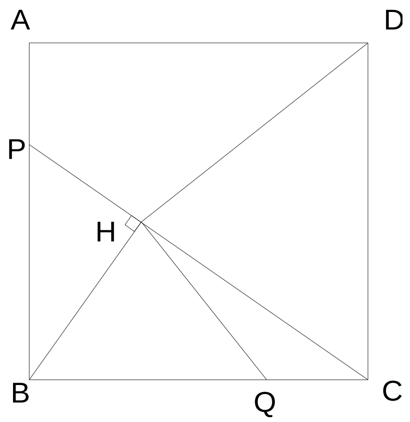
La résoudre sachant qu'elle admet une racine réelle et une racine imaginaire pure de même module.

Exercice 2.71 *On considère l'équation*

$$z^2 + (1 - i)\, z + \alpha$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$. Déterminer α pour que les points dont les affixes sont les racines de cette équation forment avec le point P d'affixe $\dfrac{i}{2}$ un triangle rectangle en P.

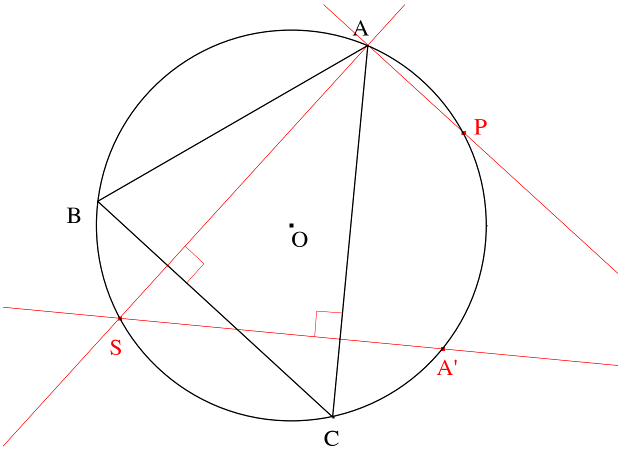
Exercice 2.72 (Olympiade mathématiques de Singapoure, test de sélection) *Soit $(ABCD)$ un carré. On construit $P \in (AB)$ et $Q \in (BC)$ tels que $BP = BQ$. Soit H la projection orthogonale de B sur (PC). Montrer que (QH) et (HD) sont orthogonales.*



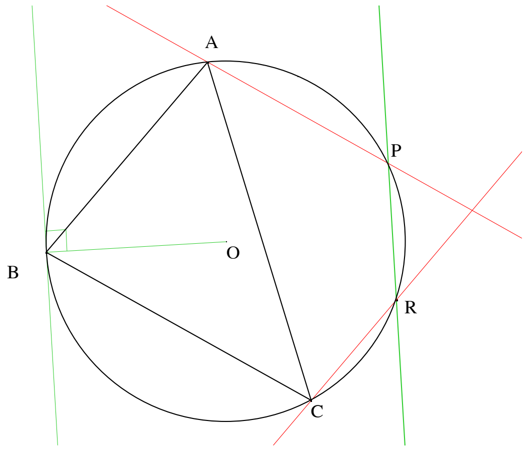
Exercice 2.73 *Soient A, B et C trois points du plan. On place l'origine du plan complexe au centre O du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle (ABC). On peut supposer, sans perte de généralités que les affixes a, b et c de ces points sont des complexes de module 1.*

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

1. *Soit P (resp. S) le point d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la parallèle à (BC) (resp. la perpendiculaire à (BC)) passant par A. Déterminer les affixes p et s de ces points.*
2. *Soit A' le point d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la perpendiculaire à (AC) passant par S. Montrer que A' ne dépend pas du point C Identifier géométriquement ce point.*



3. *Soit R le point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par C et du cercle $\mathcal{C}$*



Montrer que la droite PR est parallèle à la tangente en B au cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 2.74 *Soient x et y des réels tels que*

$$56x + 33y = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad \textit{and} \qquad 33x - 56y = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Déterminer $|x| + |y|$.

Exercice 2.75 *Soient a et b deux réels tels que $a + b = 1$, u et v deux complexes de modules 1, prouver que*

$$|au + bv| \geq \frac{1}{2}|u + v|$$

En déduire la factorisation $(au + (1-a)v) \times (av + (1-a)u) - \frac{1}{4}(u+v)^2 = -\left(\frac{1}{2} - a\right)^2 (u-v)^2$.

Exercice 2.76 *Soient* $a_0, \cdots, a_{n-1}$ n *complexes, montrer que*

$$|1 + a_0 + \cdots + a_{n-1}| \geq 1 - |a_0| - \cdots - |a_{n-1}|$$

Soit $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$, *on suppose que* $|a_0| + \cdots + |a_{n-1}| < 1$, *montrer que les racines de* P *vérifient* $|z| < 1$.

Exercice 2.77 *Calculer pour* $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{R}$ *les sommes* $C = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ *et* $S = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

(dans le même genre $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos(k\theta) \cdots$, *ou* $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta + \varphi)$ *)*

Exercice 2.78 *Calculer pour* $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{R}$ *les sommes* $C = \sum_{k=0}^{n} \cos^k(\theta) \cos(k\theta)$ *et* $S = \sum_{k=0}^{n} \cos^k(\theta) \sin(k\theta)$.

Exercice 2.79 *Calculer pour* $n \in \mathbb{N}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(ak + b)$.

Exercice 2.80 *Calculer pour* n *entier et* $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$

Exercice 2.81 *Soient* a *et* b *deux complexes, si* $\omega_0, \cdots, \omega_{n-1}$ *sont les racines énièmes de* 1, *montrer que*

$$|a| + |b| \leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega_k b|$$

Exercice 2.82 *Caractériser les complexes* a *et* b *tels que* $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Exercice 2.83 *Soit* $m \in \mathbb{C}$ *et* a *et* b *les racines de* $z^2 + 2mz + 1$, *montrer que*

$$|a| + |b| = |m + 1| + |m - 1|$$

4 Les olympiques

Exercice 2.84 *Soient* α, β, γ *trois réels tels que* $\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0 \\ \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0 \end{cases}$, *montrer que* $\begin{cases} \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0 \\ \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0 \end{cases}$

Exercice 2.85 *Soit* $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 1$ *et* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z + a| \leq a$ *et* $|z^2 + a^2| \leq a$. *Montrer que* $|z| \leq a$

Exercice 2.86 *Soit* $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 1$ *et* $z \in \mathbb{C}$. *Si* $|z + a| \leq a$ *et* $|z^2 + a| \leq a$, *montrer que* $|z| \leq a$.

Exercice 2.87 *On considère le polynôme* $P(z) = z^3 + pz + q$.
Trouver une CNS sur (p, q) *pour que ses racines forment un triangle rectangle isocèle*

Exercice 2.88 *Soit* $z \in \mathbb{C}$, *on note* M, N *et* P *les points d'affixes* z, z^2 *et* z^3 *respectivement. Déterminer* z *tel que le point* O *d'affixe* 0 *soit le centre du cercle inscrit dans le triangle* (MNP).

Indication : Soient A, B *et* C *trois points deux à deux distincts. Le vecteur* $\frac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$ *dirige la bissectrice de l'angle* $\angle BAC$

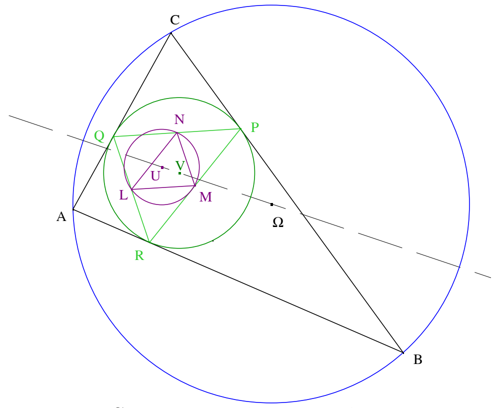
Exercice 2.89 *Montrer le théorème de Napoléon :*

> *Soit un triangle donné (noté (ABC)) , on construit sur ses côtés 3 triangles équilatéraux. Alors les isobarycentres (notés A', B' et C') de ces triangles forment un triangle équilatéral.*

Comparer ensuite les isobarycentres de (ABC) et de $(A'B'C')$.

Exercice 2.90 *Un exercice inspiré des Olympiades Estoniennes.*

On considère un triangle (ABC), on note Ω le centre de son cercle circonscrit. Le cercle inscrit à (ABC) a pour centre le point V et est tangent aux côtés de ce triangle en P, Q et R. On note L, M et N les milieux des côtés du triangle (PQR). Il s'agit de prouver que le point U, centre du cercle circonscrit à (LMN), est aligné avec V et Ω.



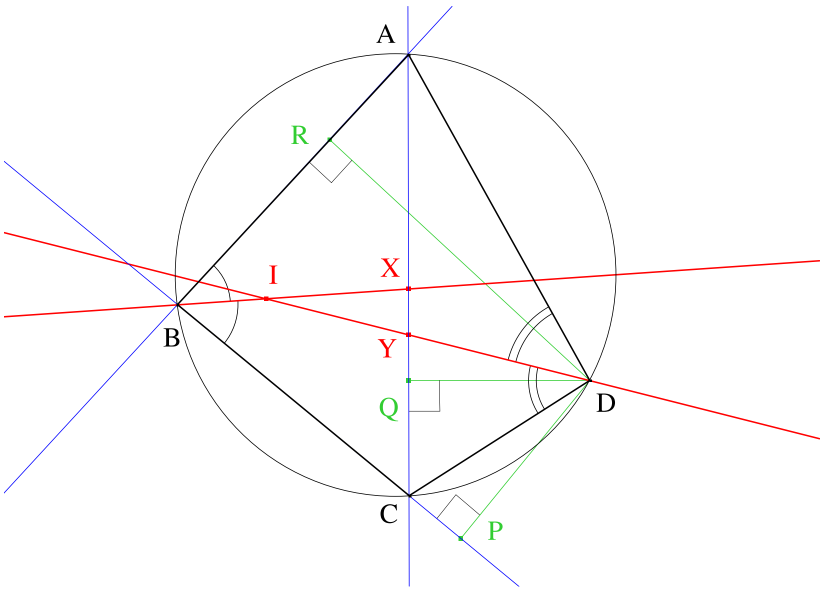
On place l'origine du plan complexe au point V centre du cercle inscrit. Sans perte de généralité, on peut supposer que le rayon du cercle inscrit à (ABC) est égal à 1.

1. *Déterminer les affixes a, b et c des points A, B et C en fonction de celles de P, Q et R (notées p, q, r).*
2. *Montrer que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit à (ABC) est*

$$\omega = \frac{2pqr\,(p+q+r)}{(p+q)\,(q+r)\,(r+p)}$$

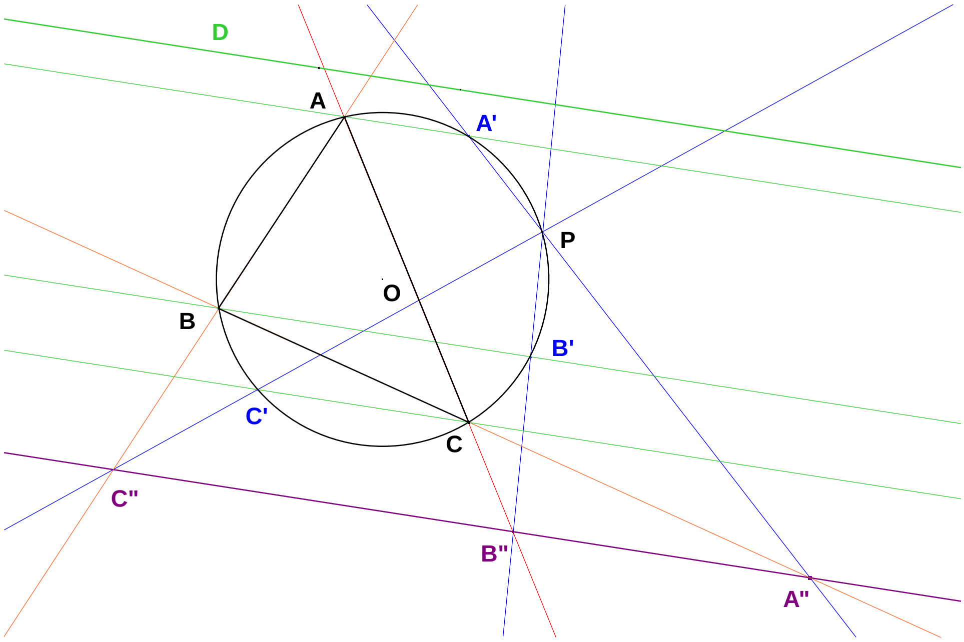
3. *Déterminer l'affixe u du centre U du cercle circonscrit à (LMN) .*
4. *En déduire que U, V et Ω sont alignés.*

Exercice 2.91 (Olympiades Internationales de Mathématiques 2003) *Soit $(ABCD)$ un quadrilatère inscrit dans un cercle. Soient P, Q et R les pieds des perpendiculaires issues de D aux côtés BC, AC et AB. Montrer que $PQ = QR$ si et seulement si les bissectrices intérieures aux angles $\angle ABC$ et $\angle ADC$ se coupent sur (AC).*



Indications : Soient X et Y les points d'intersections des bissectrices de $\angle ABC$ et de $\angle ADC$ avec la droite (AC). Montrer que X est le barycentre de A et C affectés des coefficients les longueurs BC et AB (et établir un résultat analogue avec Y).
On pourra également regarder l'exercice 2.88

Exercice 2.92 (Exercice 296 de bulletin de l'APMEP) *Les parallèles à une droite (D) menées par les sommets d'un triangle (ABC) recoupent respectivement son cercle circonscrit en A', B' et C'. Le point P est quelconque sur ce cercle tel que les droites (PA'), (PB') et (PC') recoupent les droites (BC), (CA) et (AB) en A'', B'' et C''. Démontrer que ces trois points sont alignés.*



Exercice 2.93 *Résoudre*

$$(\mathcal{S}) \quad : \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2 \\ \\ \sqrt{y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=3 \end{array} \right.$$

Exercice 2.94 *Soit $n \geq 1$ et $z \in \mathbb{C}$, montrer que*

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(z+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = n\left(z^n+1\right)$$

En déduire que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right) &= \frac{n}{2^{n-1}} \\ \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \cos^n \frac{(2k-1)\pi}{2n} &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 2.95 (Théorème de Eneström-Kakeya) *Soient $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n > 0$ $n+1$ réels et $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$.*

1. *Montrer que pour* $z \in \mathbb{C}$
$$|(1-z)P(z)| \geq a_0 - \left[(a_0-a_1)|z| + (a_1-a_2)|z|^2 + \cdots + (a_{n-1}-a_n)|z|^n + a_n|z|^{n+1}\right]$$
2. *Soit* f *définie sur* $[0,+\infty[$ *par* $f(x) = a_0 - \left[(a_0-a_1)x + (a_1-a_2)x^2 + \cdots + (a_{n-1}-a_n)x^n + a_n x^{n+1}\right]$, *quelle est la monotonie de* f *?*
3. *En déduire que les racines de* p *sont à l'extérieur du disque ouvert* $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$ *(Théorème de Eneström-Kakeya).*
4. *Vérifier ce résultat avec* $p(z) = 1 + x + \cdots + x^n$.
5. *Soit* $Q(z) = b_n z^n + \cdots + b_0$ *avec* b_k *réel strictement positif. Montrer que les racines de* Q *sont dans l'anneau défini par*
$$\min_{0\leq k\leq n-1} \frac{b_k}{b_{k+1}} \leq |z| \leq r_2 = \max_{0\leq k\leq n-1} \frac{b_k}{b_{k+1}}$$

Exercice 2.96 *Soit* z *tel que* $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ *et* $\left|z^2 - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{4}$, *montrer que* $\left|z - \frac{1}{3}\right| < \frac{2}{3}$.

Exercice 2.97 *Soit* $n \geq 1$ *et* $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, *montrer que*
$$\frac{\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|}{1 + \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{1+|z_k|}$$

5 Le grenier

Exercice 2.98 *Résoudre* $z^4 = 24i - 7$.

Exercice 2.99 *Résoudre* $z^2 - (4+i)z + 5 + 5i = 0$.

Exercice 2.100 *Résoudre* $\left(z^2+3z-2\right)^2 + \left(z^2+3z-16\right)^2 = 0$.

Exercice 2.101 *Soit* (ABC) *un triangle et* F *le milieu de* $[B,C]$, *on construit extérieurement les triangles rectangles isocèles* (ADB) *et* (AEC) *(les angles droits étant en* D *et* E*). Montrer que* (DEF) *est rectangle isocèle.*

Exercice 2.102 *Résoudre* $(1+i)z^2 - 2i\sqrt{2}z + (i-1) = 0$.

Exercice 2.103 *Déterminer le lieu des points* M *d'affixe* z *telle que* $|z| = z + \overline{z}$. *Interprétation géométrique ?*

Exercice 2.104 *Résoudre* $z^2 + 3iz + u(i-u) = 2$ *où* $u \in \mathbb{C}$.

Exercice 2.105 *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$, *résoudre l'équation* $z^2 - 2e^{i\theta}z + 2i\sin(\theta)e^{i\theta}$

Exercice 2.106 *A tout point* M *d'affixe* $z \neq 1$, *on associe le point* M' *d'affixe* $z' = \dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$.

1. *Montrer que* $|z'| = 1$ *et que* $\dfrac{z'-1}{z-1}$ *est réel.*
2. *En déduire une construction géométrique de* M'.

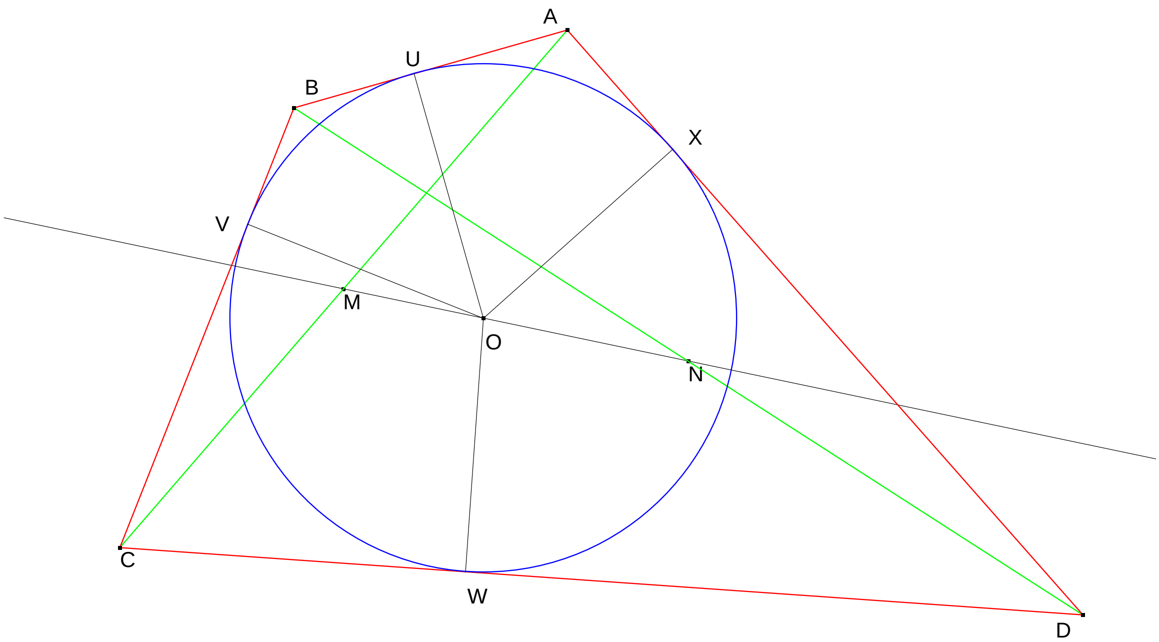
Exercice 2.107 *Soient* A *et* B *deux points distincts du plan orienté,* r_1 *est la rotation de centre* A *et d'angle* $\frac{\pi}{3}$, r_2 *celle de centre* B *et d'angle* $-\frac{2\pi}{3}$. *Si* M *est un point,* $M_1 = r_1(M)$ *et* $M_2 = r_2(M)$, *montrer que le milieu de* $[M_1, M_2]$ *ne dépend pas de* M *et le construire.*

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

Exercice 2.108 *Résoudre* $z^2 = (3+4i)^{2004}$ *puis* $(3+4i)^{2005}$.

Exercice 2.109 *Résoudre* $z^2 + iz + 2 = 0$.

Exercice 2.110 *Soit* $ABCD$ *un quadrilatère et un* $\mathcal{C}$ *cercle de centre* O *tels que* (AB), (BC), (CD) *et* (DA) *soient tangentes à* $\mathcal{C}$. *On considère en outre les milieux* M *et* N *des diagonales* $[A, C]$ *et* $[B, D]$. *Prouver que* M O *et* N *sont alignés.*



Exercice 2.111 *Soit* $a \neq 1$ *et* $z_0 \neq 0$, *on considère la suite* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *géométrique de premier terme* z_0 *et de raison* a. *On note* M_n *le point d'affixe* z_n. *Quel est le lieu de* A *d'affixe* a *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *le triangle* $(M_n M_{n+1} M_{n+2})$ *soit rectangle (en un des sommets, mais on ne précise pas lequel).*

Exercice 2.112 *Soit* $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, *résoudre, pour* $k \in \{0, \cdots, n\}$, *l'équation*

$$\left(z^2+1\right) = \omega^k \left(z-i\right)^2$$

Exercice 2.113 *Résoudre* $iz^3 + (-1+2i)\, z^2 - (4+i)\, z + 3\,(-1+2i) = 0$ *sachant que cette équation admet une solution réelle.*

Exercice 2.114 *Résoudre* $z^3 + 2z^2 - 3iz - 1 - 3i = 0$ *sachant que cette équation admet une solution réelle.*

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

Chapitre 2

NOMBRES COMPLEXES

Solution des exercices

1 Les basiques

Exercice 2.1

$$\begin{aligned}
1+i &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\
1-i &= \overline{(1+i)} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\
i-1 &= -(1-i) = e^{i\pi}(1-i) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
\sqrt{3}+i &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{(i-1)^5}{(i+1)^4} &= \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^5}{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4} = \sqrt{2}\frac{e^{i\frac{15\pi}{4}}}{e^{i\pi}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{15\pi}{4}-\pi\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = i-1 \\
(1+i)^{44} &= \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{44} = 2^{22}e^{i11\pi} = -2^{22} = -4194\,304 \\
\left(\frac{-4}{\sqrt{3}+i}\right)^{19} &= -\left(\frac{4}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^{19} = -2^{19}e^{-i\frac{19\pi}{6}} = -2^{19}e^{-i\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right)} = 2^{19}e^{-\frac{i\pi}{6}} = 2^{18}\left(\sqrt{3}-i\right)
\end{aligned}$$

Exercice 2.2 *On regarde la forme polaire. On a* $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ *et* $1-i = \overline{(1+i)} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. *Ainsi* $(1+i)^{25} = \left(\sqrt{2}\right)^{25}e^{i\frac{25\pi}{4}} = 2^{12}\sqrt{2}e^{i\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right)} = 2^{12}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2^{12}(1+i)$

Puis $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{i\pi}{4}\right)}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(e^{\frac{7i\pi}{12}}\right)^{20} = 2^{10}e^{\frac{140i\pi}{12}}$, *mais* $140 = 144-4 = 12^2-4$, *d'où* $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = 2^{10}e^{-i\frac{4\pi}{12}} = 2^{10}e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2^9\left(1-i\sqrt{3}\right)$.

Exercice 2.3 *On a* $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i)\left(\sqrt{3}-i\right)}{4} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{4} + i\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$, *puis* $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ *et* $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ *d'où* $z_3 = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}} =$. *Par unicité des parties réelles ei imaginaires,* $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$ *et* $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) =$

$\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$ *d'où le résultat.*

On en déduit que $\tan\frac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2} = 2-\sqrt{3}$.

Exercice 2.4 *On a*

$$|1| = |1+a-a-b+b| \leq |1+a| + |-a-b| + |b| = |1+a| + |a+b| + |b|$$

Exercice 2.5 *On a* $|1+z|^2 + |1-z|^2 = (1+z)(1+\overline{z}) + (1-z)(1-\overline{z}) = 1+z+\overline{z}+z\overline{z}+1-z-\overline{z}+z\overline{z} = 4$ *car* $z\overline{z} = |z|^2 = 1$.

Exercice 2.6 *L'expression* $n = a^2+b^2$ *peut aussi s'écrire* $n = |a+ib|$. *Ainsi si* $p = c^2+d^2$, *on a*

$$\begin{aligned} n \times p &= |a+ib| \times |c+id| \\ &= |(a+ib) \times (c+id)| \\ &= |(ac-bd) + i(ad+bc)| \\ &= (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 \end{aligned}$$

Si on veut manipuler uniquement des entiers naturels, on peut éventuellement remplacer $ac-bd$ *par* $bd-ac$.
Par exemple

$$\begin{aligned} 2005 &= (2\times 20 - 1\times 1)^2 + (2\times 1 + 20\times 1)^2 \\ &= 39^2 + 22^2 \end{aligned}$$

mais on a aussi

$$401 = 1^2 + 20^2$$

d'où

$$\begin{aligned} 2005 &= (2\times 1 - 1\times 20)^2 + (2\times 20 + 1\times 1)^2 \\ &= 18^2 + 41^2 \end{aligned}$$

Exercice 2.7 *On met* $\frac{1}{1-i}$ *sous forme polaire. On a* $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$. *Les racines quatrièmes de* $\frac{16\sqrt{2}}{1-i}$ *sont donc les* $z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\frac{2k\pi}{4}\right)}$ *où* $k \in \{0,1,2,3,4\}$.
Pour $k=0$, *on a* $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{16}}$, *les racines quatrièmes de* 1 *étant* $1, i, -1, -i$. *Les quatre solutions sont* $2e^{i\frac{\pi}{16}}$, $2ie^{i\frac{\pi}{16}}$, $-2e^{i\frac{\pi}{16}}$ *et* $-2ie^{i\frac{\pi}{16}}$.

Exercice 2.8 $\overline{i\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)} = -i\left(\dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}\right) = -i\left(\dfrac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1}\right) = i\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$ *d'où le résultat.*
On peut aussi écrire que $z = e^{i\theta}$, *alors* $i\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) = \operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Exercice 2.9 *Soit* $Z = \dfrac{a+b}{1+ab}$ *alors* $\overline{Z} = \dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{1+\overline{a}\overline{b}}$, *mais* $|a| = 1 \Longleftrightarrow \overline{a} = \dfrac{1}{a}$ *donc* $\overline{Z} = \dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{1+\overline{a}\overline{b}} = \dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{1+\dfrac{1}{ab}} = \dfrac{a+b}{1+ab} = Z$ *i.e.* $Z \in \mathbb{R}$.
Autre méthode : On a $a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$ *alors*

$$\frac{a+b}{1+ab} = \frac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}{1+e^{i\alpha}e^{i\beta}} = \frac{2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}}{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \in \mathbb{R}$$

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

La condition $1+ab\neq 0$ *assure que* $e^{i(\alpha+\beta)}\neq -1$, *or*

$$e^{i(\alpha+\beta)}\neq -1 \Longleftrightarrow \alpha+\beta\neq\pi\ \ (2\pi)\Longleftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{2}\neq\frac{\pi}{2}\ \ (\pi)\Longleftrightarrow \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\neq 0$$

Exercice 2.10 $|z|=1\Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{1}{z}\Leftrightarrow \overline{\left(\dfrac{a-b}{1-a\bar{b}}\right)}=\dfrac{1-a\bar{b}}{a-b}\Leftrightarrow \dfrac{\bar{a}-\bar{b}}{1-\bar{a}b}=\dfrac{1-a\bar{b}}{a-b}$
$\Leftrightarrow \left(\bar{a}-\bar{b}\right)(a-b)=\left(1-a\bar{b}\right)(1-\bar{a}b)$
or $\left(\bar{a}-\bar{b}\right)(a-b)=a\bar{a}-a\bar{b}-b\bar{a}+b\bar{b}=|a|^2+|b|^2-\left(a\bar{b}-b\bar{a}\right)$
$\left(1-a\bar{b}\right)(1-\bar{a}b)=1-b\bar{a}-a\bar{b}+ab\bar{b}\bar{a}=1+|a|^2|b|^2-\left(a\bar{b}-b\bar{a}\right)$
ainsi $|z|=1\Leftrightarrow |a|^2+|b|^2=1+|a|^2|b|^2\Leftrightarrow 1+|a|^2|b|^2-|a|^2-|b|^2=\left(|a|^2-1\right)\left(|b|^2-1\right)=0$

Exercice 2.11 $\left|\dfrac{a}{|a|^2}-\dfrac{b}{|b|^2}\right|^2=\left(\dfrac{a}{|a|^2}-\dfrac{b}{|b|^2}\right)\left(\dfrac{\bar{a}}{|a|^2}-\dfrac{\bar{b}}{|b|^2}\right)=\dfrac{a\bar{a}}{|a|^4}-\dfrac{a\bar{b}}{|ab|^2}-\dfrac{\bar{a}b}{|ab|^2}+\dfrac{b\bar{b}}{|b|^4}$
$=\dfrac{1}{|a|^2}-\dfrac{a\bar{b}}{|ab|^2}-\dfrac{\bar{a}b}{|ab|^2}+\dfrac{1}{|b|^2}$
$\left(\dfrac{|a-b|}{|a|\,|b|}\right)^2=\dfrac{(a-b)\left(\bar{a}-\bar{b}\right)}{|ab|^2}=\dfrac{a\bar{a}-a\bar{b}-\bar{a}b+b\bar{b}}{|ab|^2}=\dfrac{1}{|b|^2}-\dfrac{a\bar{b}}{|ab|^2}-\dfrac{\bar{a}b}{|ab|^2}+\dfrac{1}{|a|^2}$
Autre preuve : On utilise l'égalité, si $z\neq 0$, $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$. *Alors* $\left|\dfrac{a}{|a|^2}-\dfrac{b}{|b|^2}\right|=\left|\overline{\dfrac{a}{|a|^2}-\dfrac{b}{|b|^2}}\right|=\left|\dfrac{\bar{a}}{|a|^2}-\dfrac{\bar{b}}{|b|^2}\right|=\left|\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right|=$
$\dfrac{|a-b|}{|a|\,|b|}$.

Exercice 2.12 *Il suffit de montrer que* $|ab+bc+ca|^2=|a+b+c|^2$ *car les nombres sont positifs.*

$$\begin{aligned}
|ab+bc+ca|^2 &= (ab+bc+ca)\overline{(ab+bc+ca)}=(ab+bc+ca)\left(\bar{a}\bar{b}+\bar{b}\bar{c}+\bar{c}\bar{a}\right)\\
&= (ab+bc+ca)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)\\
&= (ab+bc+ca)\left(\frac{c}{abc}+\frac{a}{abc}+\frac{b}{abc}\right)\\
&= \frac{(ab+bc+ca)(a+b+c)}{abc}=(a+b+c)\left(\frac{ab}{abc}+\frac{bc}{abc}+\frac{ca}{abc}\right)\\
&= (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\
&= (a+b+c)\left(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}\right)=(a+b+c)\overline{(a+b+c)}
\end{aligned}$$

On a fortement utilisé $a\bar{a}=b\bar{b}=c\bar{c}=1$ *qui se traduit par* $\bar{a}=\dfrac{1}{a}$, $\bar{b}=\dfrac{1}{b}$ *et* $\bar{c}=\dfrac{1}{c}$.
Autre méthode plus rapide : on a $|abc|=|a|\,|b|\,|c|=1$ *donc* $|ab+bc+ca|=\left|\dfrac{ab+bc+ca}{abc}\right|=\left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right|$, *mais* $|a|=|b|=|c|=1$ *donc* $\dfrac{1}{a}=\bar{a}$, $\dfrac{1}{b}=\bar{b}$ *et* $\dfrac{1}{c}=\bar{c}$. *Ainsi* $|ab+bc+ca|=\left|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}\right|=|a+b+c|$.

Exercice 2.13 *Il s'agit de prouver que*

$$\frac{1}{1-u}+\overline{\frac{1}{1-u}}=\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1-\bar{u}}=1$$

mais puisque $|u| = 1$, *on a* $\overline{u} = \dfrac{1}{u}$ *donc*

$$\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1-\frac{1}{u}} = \frac{1}{1-u} + \frac{u}{u-1} = \frac{1}{1-u} - \frac{u}{1-u} = 1$$

d'où le résultat.

Exercice 2.14 *On localise z en passant aux modules.*

$$\begin{aligned} z^3 = \overline{z} \quad &\Longrightarrow \quad |z|^3 = |z| \\ &\Longrightarrow \quad |z|\left(|z|-1\right)\left(|z|+1\right) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad |z| = 0 \text{ ou } |z| = 1 \end{aligned}$$

On écarte la solution évidente $z = 0$, *ainsi* $|z| = 1 \Longleftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$ *et l'équation de départ devient*

$$z^4 = 1 \Longleftrightarrow z \in \{i, -1, -i, 1\}$$

En résumé l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{0, i, -1, -i, 1\}$$

Moralité, ne pas oublier que la conjugaison et le module peuvent donner des informations.
On peut aussi s'inspirer de la méthode de résolution de $z^n = a$. *Si on pose* $z = \rho e^{i\theta}$ *(avec* $\rho \neq 0$ *car on écarte la solution évidente où* $z = 0$*) alors*

$$z^3 = \overline{z} \Longleftrightarrow \rho^3 e^{3i\theta} = \rho e^{-i\theta} \Longleftrightarrow \rho^2 e^{4i\theta} = 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ 4\theta = 0 \ (2\pi) \end{cases}$$

on termine ensuite facilement.

Exercice 2.15 *On calcule* $\dfrac{z_{n+2} - z_{n+1}}{z_n - z_{n+1}} = \dfrac{a z_{n+1} - z_{n+1}}{\frac{1}{a} z_{n+1} - z_{n+1}} = \dfrac{a(a-1)}{1-a} = -a \in i\mathbb{R}$.

Exercice 2.16 *Puisque P a pour affixe* $\dfrac{1}{z}$, *on suppose* $z \neq 0$. *On sait que*

$$\begin{aligned} M, N, P \text{ alignés} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{z} - z}{z^2 - z} \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ z^2 - z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{z+1}{z^2} \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ z = 0 \text{ ou } z = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{z+1}{z^2} = \overline{\left(\dfrac{z+1}{z^2}\right)} \\ \text{ou} \\ z = 1 \text{ (car on sait que } z \neq 0) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (z+1)\,\overline{z}^2 = (\overline{z}+1)\,z^2 \\ \text{ou} \\ z = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z\overline{z}\,(\overline{z} - z) = (z - \overline{z})\,(z + \overline{z}) \\ \text{ou} \\ z = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (\overline{z} - z)\,(z\overline{z} + z + \overline{z}) = 0 \\ \text{ou} \\ z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient donc comme condition, .

$$M, N, P \text{ alignés} \Leftrightarrow \begin{cases} z \in \mathbb{R}^* \text{ (qui inclus } z = 1) \\ \text{ou } |z|^2 + (z + \overline{z}) = 0 \end{cases}$$

Si on pose $z = x + iy$ *avec* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *on a* $|z|^2 + (z + \overline{z}) = x^2 + y^2 + 2x = (x+1)^2 + y^2 - 1$. *On en déduit que le lieu cherché est la réunion de l'axe des réels privé de O et du cercle de centre* $(-1, 0)$, *de rayon* 1 *privé de O.*

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

Exercice 2.17 *M, A, N sont alignés si et seulement si* $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1+z^2-1}{z-1}\in\mathbb{R}\\ ou\ z=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z^2\left(\overline{z}-1\right)=\overline{z}^2\left(z-1\right)\\ ou\ z=1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left(|z|^2-\overline{z}-z\right)\left(\overline{z}-z\right)=0\\ ou\ z=1\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}|z|^2-\overline{z}-z=0\\ ou\ z\in\mathbb{R}\end{array}\right.$

En posant $z=x+iy$,$|z|^2-\overline{z}-z=x^2+y^2-2x=(x-1)^2+y^2-1$
Le lieu cherché est la réunion de l'axe Ox et du cercle centré en $A(1)$ de rayon 1.

Exercice 2.18 *On a*

$$\begin{aligned}(z-i)^n=1 &\iff \exists k\in\{0,...,n-1\}\,,\ z-i=\exp\left(\tfrac{2ik\pi}{n}\right)\\ &\iff \exists k\in\{0,...,n-1\}\,,\ z=i+\exp\left(\tfrac{2ik\pi}{n}\right)\\ &\iff \exists k\in\{0,...,n-1\}\,,\ z=\exp\left(\tfrac{i\pi}{2}\right)+\exp\left(\tfrac{2ik\pi}{n}\right)\\ &\iff \exists k\in\{0,...,n-1\}\,, z=2\cos\left(\frac{\frac{2k\pi}{n}-\frac{\pi}{2}}{2}\right)\exp\left(\frac{\frac{2ik\pi}{n}+\frac{i\pi}{2}}{2}\right)=2\cos\left(\tfrac{k\pi}{n}-\tfrac{\pi}{4}\right)\exp\left(i\left(\tfrac{k\pi}{n}+\tfrac{\pi}{4}\right)\right)\end{aligned}$$

Ainsi $z_k=2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}-\dfrac{\pi}{4}\right)\exp\left(i\left(\dfrac{k\pi}{n}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ *pour* $k\in\{0,...,n-1\}$.

Exercice 2.19

$$\begin{aligned}(z-1)^n=(z+1)^n &\Leftrightarrow \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n=1 \text{ car } z=-1 \text{ n'est pas solution}\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\{0,..,n-1\}\,,\frac{z-1}{z+1}=e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k\in\{0,..,n-1\}\,,\ z-1=e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z+1)\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\{0,..,n-1\}\,,\ z\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)=1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\end{aligned}$$

Avant de diviser (puisqu'on ne divise jamais par zéro et que $1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}=0$ si et seulement si $k=0$), on élimine le cas $k=0$. En effet il ne peut se présenter, puisqu'il conduit à l'égalité $0=2$. On a donc

$$\begin{aligned}(z-1)^n=(z+1)^n &\Leftrightarrow \exists k\in\left\{\boxed{1},..,n-1\right\}\,,\ z=\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\{1,..,n-1\}\,,\ z=\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}=\frac{2\cos\dfrac{k\pi}{n}e^{\frac{ik\pi}{n}}}{-2i\sin\dfrac{k\pi}{n}e^{\frac{ik\pi}{n}}}=i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

car $\dfrac{1}{i}=-i$.
Les solutions sont les $i\,\mathrm{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ *pour* $k\in\{1,..,n-1\}$.
Remarque : *Les solutions sont bien imaginaires pures,ce que l'on peut prévoir, en effet **si** z est solution de $(z-1)^n=(z+1)^n$, en passant au module, on obtient $|z-1|^n=|z+1|^n$, les **réels positifs** $|z-1|$ et $|z+1|$ ont donc même puissances énièmes, donc sont égaux. On a donc $|z-1|=|z+1|$. Ceci signifie que le point d'affixe z est sur la médiatrice des points d'affixe 1 et -1. Mais cette médiatrice est l'axe des imaginaires purs.*
On a $n-1$ solutions et non pas n solutions. En effet, on cherche les racines du polynôme $P(z)=(z-1)^n-(z+1)^n$, en développant par le binôme de Newton ce polynôme, on a

$$P(z)=\left(z^n-nz^{n-1}+\cdots\right)-\left(z^n+nz^{n-1}+\cdots\right)=-2nz^{n-1}+\cdots$$

On constate donc que P est de degré $n-1$, il admet donc $n-1$ racines sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2.20 *On pose $Z=z^2$, l'équation devient $Z^2-(3+8i)Z-16+12i=0$. Le discriminant est $\Delta=(3+8i)^2-4(-16+12i)=9$. Les racines sont alors $Z_1=\frac{3+8i-3}{2}=4i$ et $Z_2=\frac{3+8i+3}{2}=3+4i$.*
On résout $z^2=Z_1=4i=4e^{i\frac{\pi}{2}}$. Les solutions sont $z_1=\sqrt{4}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $z_2=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

On résout $z^2 = Z_2 = 3+4i$. On cherche les solutions sous la forme $z = a+ib$, avec a et b réels. On obtient alors le système $\begin{cases} a^2-b^2 & =3 \\ 2ab & =4 \\ a^2+b^2 & =\sqrt{3^2+4^2}=5 \end{cases}$. *Ce qui donne $z_3 = 2+i$ et $z_4 = -2-i$.*
En définitive, les solutions sont $\left\{\sqrt{2}+i\sqrt{2}, -\sqrt{2}-i\sqrt{2}, 2+i, -2-i\right\}$

Exercice 2.21 *On doit résoudre*

$$\left(z^2+3z-2\right)^2 = i^2\left(2z^2-3z+2\right)^2$$

ce qui revient à résoudre

$$\begin{array}{rcl} \left(z^2+3z-2\right)+i\left(2z^2-3z+2\right) & = & (1+2i)\,z^2+(3-3i)\,z-2+2i=0 \\ & & \text{et} \\ \left(z^2+3z-2\right)-i\left(2z^2-3z+2\right) & = & (1-2i)\,z^2+(3+3i)\,z-2-2i=0 \end{array}$$

Le discriminant de la première équation est $\Delta = (3-3i)^2-4(1+2i)(-2+2i) = 24-10i$. On cherche $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On obtient le système

$$\begin{cases} a^2-b^2 & =24 \\ 2ab & =-10<0 \\ a^2+b^2 & =\sqrt{24^2+10^2}=26 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 & =25 \\ b^2 & =1 \\ ab & <0 \end{cases}$$

Les racines de la première équation sont donc $z_1 = \dfrac{-3+3i-5+i}{2(1+2i)} = 2i$ *et* $z_2 = \dfrac{-3+3i+5-i}{2(1+2i)} = \dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}i$. *Puisque l'équation de départ est à coefficients réels, les racines sont deux à deux conjuguées. En conclusion les solutions sont*

$$2i, -2i, \frac{3}{5}-\frac{1}{5}i, \frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$$

Exercice 2.22 *Soit $x \in \mathbb{R}$, cette racine alors $x^3+x^2+(-1+3i)\,x+44+12i = x^3+x^2-x+44+i(3x+12) = 0$. Puisque $x^3+x^2-x+44 \in \mathbb{R}$ et $(3x+12) \in \mathbb{R}$, x est solution si et seulement si $x^3+x^2-x+44 = 0$ et $(3x+12) = 0$. On en déduit que $x = -4$.*
On factorise alors par $(z+4)$. On obtient $z^3+z^2+(-1+3i)\,z+44+12i = \left(z^2-3z+11+3i\right)(z+4)$. Il reste à résoudre $z^2-3z+11+3i$. Le discriminant est $\Delta = 9-44-12i = -35-12i$. On cherche $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$.
On a le système $\begin{cases} a^2-b^2 = & -35 \\ a^2+b^2 = & \sqrt{35^2+12^2}=37 \\ 2ab=-12 & <0 \end{cases}$, *on choisit donc $\delta = 1-6i$.*
Les deux autres racine sont alors $z_1 = \frac{3+1-6i}{2} = 2-3i$ et $z_2 = \frac{3-1+6i}{2} = 1+3i$
Les solution sont donc $-4, 2-3i, 1+3i$

Exercice 2.23

1. *Notons $z = ix$ cette racine, alors z est solution si et seulement si*

$$\left(x^2-3x-10\right)+i\left(-x^3+2x^2+3x-10\right) = 0$$

Cette condition est équivalente à $x^2-3x-10 = 0$ et $-x^3+2x^2+3x-10 = 0$. On résout la première équation, ce qui donne $x = -2$ ou $x = 5$. On vérifie que seul -2 est aussi racine de $-x^3+2x^2+3x-10 = 0$.
La solution imaginaire de (E) est $z = -2i$. On factorise alors par $(z+2i)$ pour obtenir

$$(z+2i)\left(z^2-(1+4i)\,z-5(1-i)\right) = 0$$

On résout ensuite $\left(z^2-(1+4i)\,z-5(1-i)\right)$ de discriminant $\Delta = 5-12i = (3-2i)^2$.
On trouve alors $a = -2i$, $b = -1+3i$ et $c = 2+i$.

2. *On peut placer les points dans le plan, on constate que (ABC) est isocèle rectangle en C. On peut le vérifier car $BC = |c-b| = \sqrt{13}$, $AC = |c-a| = \sqrt{13}$ et $AB = |b-a| = \sqrt{26}$. Ainsi $AB^2 = AC^2+BC^2$. On peut aussi constater que $a-c = i(b-c)$, ce qui signifie que le vecteur $\overrightarrow{CA}$ est l'image de $\overrightarrow{CB}$ par la rotation vectorielle d'angle $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ (car $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{|a-c|}{|b-c|} = |i|$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}\right) = \arg\left(\dfrac{a-c}{b-c}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$).*

Exercice 2.24 *1.*

$$|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-2}{z+i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-2| = |z+i|$$

On a donc $|f(z)| = 1$ *si et seulement si* M *est sur la médiatrice de* $[A(2), B(-i)]$.

2.

$$f(z) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \frac{z-2}{z+i} \in \mathbb{R}$$

ce qui est réalisé si et seulement si les points M, A *et* B *sont alignés (avec* $M \neq B$*). Le lieu de* M *est la droite* (AB) *privée de* B.

3.

$$f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{2-z}{-i-z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi) \text{ et } M \neq B$$

Le lieu de$M$ *est le cercle de diamètre* $[AB]$ *privé de* B.

Exercice 2.25 *On travaille par double équivalence.*

$\Longrightarrow$ *Par hypothèse on a* $\lambda = 1$. *On veut mprouver que* $Z = \dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$ *est de module* 1, *ce qui revient à prouver que* $\overline{Z} = \dfrac{1}{Z}$. *Or*

$$\overline{Z} = \overline{\left(\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right)} = \frac{\overline{1+\lambda i}}{\overline{1-\lambda i}} = \frac{1-\lambda i}{1+\lambda i} \text{ car } \lambda \in \mathbb{R}$$

$\Longleftarrow$ *Par hypothèse on a* $\left|\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1$. *On peut écrire cette condition sous la forme*

$$\left|\frac{i(-i+\lambda)}{-i(i+\lambda)}\right| = \left|\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right| = 1 \Longleftrightarrow |\lambda - i| = |\lambda + i|$$

Le point M *d'affixe* λ *est donc équidistant des points* A *d'affixe* i *et* B *d'affixe* $-i$. *Il est donc sur la médiatrice de* $[A, B]$ *qui est l'axe réel. Conclusion* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.26 *Soit* M *d'affixe* z, *on note* $M_1(z_1)$ *l'image de* M *par* r_1 *et* M' *l'image de* M_1 *par* r_2. *On a alors*

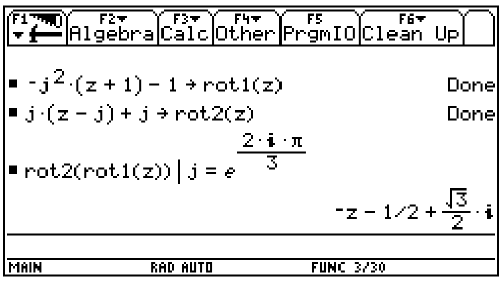
$$\begin{aligned} z_1 + 1 &= e^{i\frac{\pi}{3}}(z+1) = -j^2(z+1) \\ z' - j &= e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_1 - j) = j(z_1 - j) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} z' &= j + j\left(-1 - j^2(z+1) - j\right) \\ &= j + j\left(j^2 - j^2(z+1)\right) \\ &= j + 1 - (z+1) \\ &= -z + j \end{aligned}$$

On reconnaît la rotation d'angle $\arg(-1) = \pi$ *et de centre* Ω *d'affixe* $\dfrac{j}{2}$. *Or, une rotation d'angle* π *est une symétrie centrale.*

Remarque : *Une fois de plus, on peut se servir de sa calculette (avec intelligence)*



La barre | se lit "sachant que ", c'est une instruction bien utile.

Exercice 2.27

1. *On note* $a, b, c, d, a' \cdots$ *les affixes des points.*

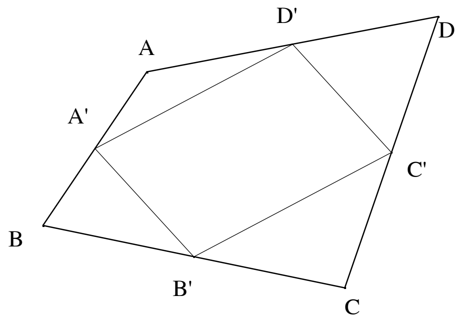
   On a

   $$a' = \frac{a+b}{2},\ b' = \frac{b+c}{2},\ c' = \frac{c+d}{2},\ d' = \frac{d+a}{2}$$

   Il suffit de prouver que $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'}$ *i.e.*

   $$\frac{d+a}{2} - \frac{a+b}{2} = d' - a' = c' - b' = \frac{c+d}{2} - \frac{b+c}{2}$$

   Ce qui est clair.

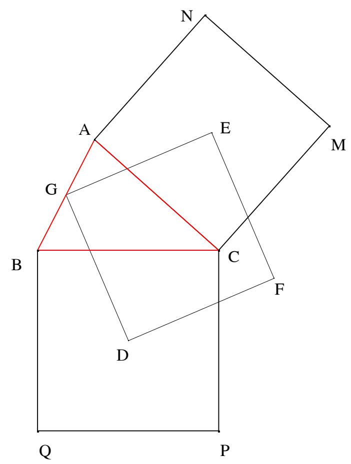


2. *Le point* D *est le milieu de* $[B, F]$ *et* E *le milieu de* $[A, M]$ *donc* $(EGDF)$ *est le parallélogramme de Varigon du quadrilatère* $(AMPB)$ *. Il suffit donc de prouver que* $\overrightarrow{GE}$ *se déduit de* $\overrightarrow{GD}$ *par une rotation d'angle* $\frac{\pi}{2}$*. Ce qui, en complexe se traduit (avec des notations évidentes pour les affixes)*

   $$e - g = i(d - g)$$

   On a immédiatement $g = \frac{a+b}{2}$*. Il reste à calculer les affixes* p *et* m *pour en déduire* e *et* d*. Le point* P *se déduit de* B *par la rotation de centre* C *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *donc*

   $$p - c = i(b - c)$$



   De même

   $$m - c = -i(a - c) \text{ (rotation de centre } C \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{2}\text{)}$$

   enfin

   $$\begin{aligned} e &= \frac{a+m}{2} = \frac{(1-i)a + (1+i)c}{2} \\ d &= \frac{b+p}{2} = \frac{(1+i)b + (1-i)c}{2} \end{aligned}$$

   et

   $$\begin{aligned} d - g &= \frac{(1+i)b + (1-i)c}{2} - \frac{a+b}{2} = \frac{ib - a + (1-i)c}{2} \\ e - g &= \frac{(1-i)a + (1+i)c}{2} - \frac{a+b}{2} = \frac{-ia - b + (1+i)c}{2} = i(d - g) \end{aligned}$$

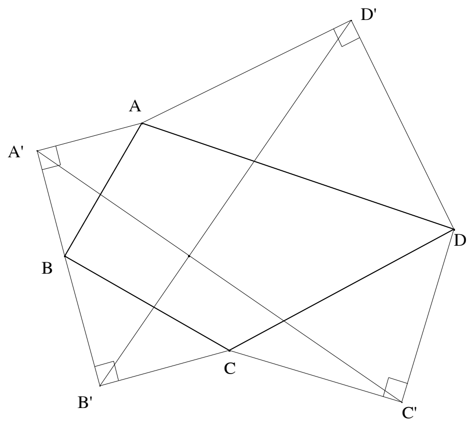
Exercice 2.28 *On note* $a, b, c, d, a', \cdots$ *les affixes des différents points.*

Le point A est l'image de B par la rotation de centre A' et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que

$$a - a' = i\,(b - a') \qquad (2.1)$$

De même

$$\begin{aligned} b - b' &= i\,(c - b') &(2.2)\\ c - c' &= i\,(d - c') &(2.3)\\ d - d' &= i\,(a - d') &(2.4)\end{aligned}$$



Compte tenu du résultat demandé, il faut faire apparaître $c' - a'$ (et $d' - b'$). Pour cela on fait les opérations suivantes $(1) - (3)$ et $(2) - (4)$ ce qui donne

$$\begin{aligned} a - c + c' - a' &= i\,(b - d + c' - a')\\ b - d + d' - b' &= i\,(c - a + d' - b')\end{aligned}$$

ou plus simplement

$$\begin{aligned} (1 - i)\,(c' - a') &= i\,(b - d) + (c - a)\\ (1 - i)\,(d' - b') &= (d - b) + i\,(c - a)\\ &= i^2\,(b - d) + i\,(c - a)\end{aligned}$$

Ceci prouve que

$$(d' - b') = i\,(c' - a')$$

On en déduit que $|d' - b'| = B'D' = |c' - a'| = A'C'$ et que $\left(\widehat{\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{B'D'}}\right) = \arg \dfrac{d' - b'}{c' - a'} = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2.29 *On résout $Z^2 = -7 + 24i$ sous forme algébrique (on a posé $Z = z^2$). On cherche Z sous la forme $Z = a + ib$. On obteint alors le système*

$$\left\{\begin{array}{ll} a^2 + b^2 & = \sqrt{49 + (24)^2} = 25 \quad \textit{équation aux modules}\\ a^2 - b^2 & = -7\\ \quad 2ab & = 24 > 0\end{array}\right.$$

On en déduit que $Z = 3 + 4i$ ou $Z = -3 - 4i$. On résout ensuite $z^2 = 3 + 4i$ en posant $z = \alpha + i\beta$, on a

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha^2 + \beta^2 & = \sqrt{16 + 9} = 5 \quad \textit{équation aux modules}\\ \alpha^2 - \beta^2 & = 3\\ \quad 2ab & = 4 > 0\end{array}\right.$$

ce qui donne $z = 2 + i$ ou $z = -2 - i$. Pour finir, il faut résoudre $z^2 = -3 - 4i = i^2\,(3 + 4i)$, qui admet comme solution $i\,(2 + i) = -1 + 2i$ et $-i\,(2 + i) = 1 - 2i$. En conclusion, les solutions sont $\{\pm (1 - 2i)\,,\ \pm (2 + i)\}$.

Exercice 2.30 *$z = 0$ n'est pas solution, on a donc*

$$\begin{aligned} (z - i)^n = z^n \quad &\iff \quad \left(\frac{z - i}{z}\right)^n = 1\\ &\iff \quad \exists k \in \{0, \cdots, n - 1\},\ \frac{z - i}{z} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}\\ &\iff \quad \exists k \in \{0, \cdots, n - 1\},\ z - i = e^{\frac{2ik\pi}{n}} z\\ &\iff \quad \exists k \in \{0, \cdots, n - 1\},\ z\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = i\end{aligned}$$

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

Pour $k=0$, on obtient $0=i$, le cas $k=0$ ne se présente donc pas. On a donc

$$\begin{aligned}(z-i)^n=z^n &\iff \exists k\in\{1,\cdots,n-1\},\ z=\frac{i}{\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}\\ &\iff \exists k\in\{1,\cdots,n-1\},\ z=\frac{i}{2i\sin\dfrac{k\pi}{n}e^{\frac{ik\pi}{n}}}\\ &\iff \exists k\in\{1,\cdots,n-1\},\ z=\frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}}{2\sin\dfrac{k\pi}{n}}=\frac12\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)+\frac{i}{2}\end{aligned}$$

Les solutions (au nombre de $n-1$, pourquoi ?) sont toutes de partie imaginaire égale à $\frac12$ (ce qui ne nous surprend pas car si $(z-i)^n=z^n$ alors $|z-i|^n=|z|^n \iff |z-i|=|z|$ i.e le point d'affixe z est à égale distance de O et de A d'affixe i).

Exercice 2.31 *On sait que $\overline{a}=\frac1a$, $\overline{b}=\frac1b$ et $\overline{c}=\frac1c$ donc*

$$\begin{aligned}\overline{\frac{(c-b)(1+ab)}{b(1+ac)}} &= \frac{\left(\overline{c}-\overline{b}\right)\left(1+\overline{a}\overline{b}\right)}{\overline{b}\left(1+\overline{a}\overline{c}\right)}\\ &= \frac{\left(\dfrac1c-\dfrac1b\right)\left(1+\dfrac{1}{ab}\right)}{\dfrac1b\left(1+\dfrac{1}{ac}\right)}\\ &= \frac{\dfrac{b-c}{bc}\times\dfrac{ab+1}{ab}}{\dfrac{ac+1}{abc}}\\ &= -\frac{(c-b)(1+ab)}{b(1+ac)}\end{aligned}$$

Autre méthode, on pose $a=e^{i\alpha}$, $b=e^{i\beta}$, $c=e^{i\gamma}$ alors

$$\begin{aligned}\frac{(c-b)(1+ab)}{b(1+ac)} &= \frac{\left(e^{i\gamma}-e^{i\beta}\right)\left(1+e^{i(\alpha+\beta)}\right)}{e^{i\beta}\left(1+e^{i(\alpha+\gamma)}\right)}\\ &= \frac{2i\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\gamma+\beta}{2}}\times 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}}{e^{i\beta}\times 2\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}}\\ &= i\times\frac{2\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}e^{i\left(\frac{\gamma+\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}\\ &= i\times\frac{2\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}\in i\mathbb{R}\end{aligned}$$

Exercice 2.32 *L'affixe a' de A' est $\frac{b+c}{2}$ puisque A' est le milieu de $[B,C]$, de même les affixes de B' et C' sont respectivement $\frac{a+c}{2}$ et $\frac{a+b}{2}$. Si P est le symétrique de M par rapport à A', alors A' est le milieu de $[M,P]$, ainsi $a'=\frac{p+z}{2}=\frac{b+c}{2}\Longrightarrow p=b+c-z$. De la même manière (symétrie des rôles), on a $q=c+a-z$ et $r=a+b-z$. Enfin le milieu de $[A,P]$ a pour affixe $\frac{a+p}{2}=\frac{a+b+c-z}{2}$, mais l'affixe du milieu de $[B,Q]$ est $\frac{b+q}{2}=\frac{a+b+c-z}{2}$ et c'est aussi l'affixe su milieu de $[C,R]$! Cela prouve que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.*

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

L'application $M \longmapsto N$ *se traduit en complexe par* $z \to -\frac{1}{2}z+\frac{a+b+c}{2}$. *Il s'agit donc d'une homothétie de rapport* $-\frac{1}{2}$ *de centre le point d'affixe* ω *tel que* $\omega = -\frac{1}{2}\omega + \frac{a+b+c}{2}$, *soit* $\omega = \frac{a+b+c}{3}$. *On reconnait l'affixe de l'isobarycentre de* (ABC) *qui est donc le centre de l'homothétie.*

Exercice 2.33 *On a*

$$\begin{aligned}(z-1)^n &= z^n \Longleftrightarrow \left(\frac{z}{z-1}\right)^n = 1 \text{ car } z=1 \text{ n'est pas solution (si l'on remplace } z \text{ par } 1, \text{ on obtient } 0=1)\\ &\Longleftrightarrow \exists k\in\{0,\cdots n-1\}\ ,\ \frac{z}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}\\ &\Longleftrightarrow \exists k\in\{0,\cdots n-1\}\ ,\ (z-1)\,e^{\frac{2ik\pi}{n}} = z\\ &\Longleftrightarrow \exists k\in\{0,\cdots n-1\}\ ,\ z\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1\right) = e^{\frac{2ik\pi}{n}}\end{aligned}$$

Avant de diviser par $e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1$, *on détermine quand ce terme est nul. Pour* $k\in\{0,\cdots n-1\}$, $e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1=0$ *si et seulement si* $k=0$. *Mais si* $k=0$, *alors* $z\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1\right)=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ *s'écrit* $0=1$ *qui est faux. Ainsi l'indice* $k=0$ *est à exclure, et donc*

$$\begin{aligned}(z-1)^n &= z^n \Longleftrightarrow \exists k\in\left\{\boxed{1},\cdots n-1\right\},\ 2iz\sin\frac{k\pi}{n}e^{\frac{ik\pi}{n}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}\\ &\Longleftrightarrow \exists k\in\{1,\cdots n-1\},\ z=-ie\frac{\frac{ik\pi}{n}}{2\sin\frac{k\pi}{n}} = -i\left(\frac{1}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)+\frac{i}{2}\right)\\ &\Longleftrightarrow \exists k\in\{1,\cdots n-1\},\ z=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

Les solutions sont donc les $\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ *pour* $k\in\{1,\cdots n-1\}$. *Les points d'affixes les solutions sont tous sur une droite parallèles à l'axe* Oy, *car* $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)=\frac{1}{2}$ *ne dépend pas de* n.

Pour $n=2$, *on a une seule solution* $z=\frac{1}{2}$.

Pour $n=3$, *on a deux solutions* $z_1=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{i}{2\sqrt{3}}$ *et* $z_2=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{i}{2\sqrt{3}}$

Pour $n=4$, *on a trois solutions* $z_1=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$, $z_2=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{2\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ *et* $z_3=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

Exercice 2.34 *On a*

$$\begin{aligned}(z+i)^n=z^n &\Longleftrightarrow \frac{z+i}{z}=e^{\frac{2ik\pi}{n}} && \text{car } z=0 \text{ n'est pas solution}\\ &\Longleftrightarrow \exists k\in\{0,\cdots n-1\},\ \frac{z+i}{z}=e^{\frac{2ik\pi}{n}}\\ &\Longleftrightarrow \exists k\in\{0,\cdots n-1\},z\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)=i\end{aligned}$$

Le cas $k=0$ ne peut se présenter car il conduit à $0=i$ qui est faux, et $1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est nul si et seulement si k est multiple de n, ainsi

$$\begin{aligned}(z+i)^n=z^n &\iff \exists k\in\left\{\boxed{1},\cdots n-1\right\}, z=\frac{i}{\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}\\ &\iff \exists k\in\{1,\cdots n-1\}\,,\ z=\frac{-ie^{-\frac{ik\pi}{n}}}{-2i\sin\frac{k\pi}{n}}=\frac{e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{\sin\frac{k\pi}{n}}=\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{n}-\frac{i}{2}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S}=\left\{\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{n}-\frac{i}{2},\ k=1,\cdots n-1\right\}$$

Exercice 2.35

1. *Le discriminant est $\Delta'=(2^\alpha\cos(\alpha))^2-2^{2\alpha}=2^{2\alpha}\left(\cos^2\alpha-1\right)=-2^{2\alpha}\sin^2\alpha=(2^\alpha i\sin\alpha)^2$, les solutions sont donc $z_1=2^\alpha\cos(\alpha)+2^\alpha i\sin\alpha=2^\alpha e^{i\alpha}=$ et $z_2=2^\alpha\cos(\alpha)-2^\alpha i\sin\alpha=2^\alpha e^{-i\alpha}=\overline{z_1}$ (ce qui est normal, puisque l'équation est à coefficient réels).*
2. *Puisque z_1 et z_2 sont conjugués, on a $OA=OB$, il suffit donc d'avoir $OA^2=AB^2\iff|z_1|^2=|z_2-z_1|^2\iff 2^{2\alpha}=2^{2\alpha+2}\times\sin^2\alpha\iff\sin^2\alpha=\dfrac{1}{4}\iff\sin\alpha=\pm\dfrac{1}{2}$*
   Ce qui donne $\alpha=\pm\dfrac{\pi}{6}$ (π). Les valeurs de α qui conviennent sont donc, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}$.

Exercice 2.36 *Soit ω un complexe fixé.*

1. *On a $\Delta=(2+i\omega)^2-4(i\omega+2-\omega)=-\left(\omega^2-4\omega+4\right)=-(\omega-2)^2=[i(\omega-2)]^2$. Les solutions sont donc*

$$\begin{aligned}z_1&=\frac{-2-i\omega+i\omega-2i}{2}=-1-i\\ z_2&=\frac{-2-i\omega-i\omega+2i}{2}=-i\omega-1+i\end{aligned}$$

2. *Les trois points sont alignés si et seulement si*

$$\frac{(-i\omega-1+i)-(-1-i)}{\omega-(-1-i)}\in\mathbb{R}\ ou\ \omega=-1-i$$

ce qui s'écrit

$$\begin{aligned}&\frac{(-i\omega-1+i)-(-1-i)}{\omega-(-1-i)}=\overline{\left(\frac{(-i\omega-1-i)-(-1-i)}{\omega-(-1-i)}\right)} && ou\ \omega=-1-i\\ \iff\ & i\frac{\omega-2}{\omega+1+i}=-i\frac{\overline{\omega}-2}{\overline{\omega}+1-i} && ou\ \omega=-1-i\\ \iff\ & (\omega-2)(\overline{\omega}+1-i)+(\omega+1+i)(\overline{\omega}-2)=0 && ou\ \omega=-1-i\\ \iff\ & 2\omega\overline{\omega}-(\omega+\overline{\omega})-i(\omega-\overline{\omega})-4=0 && ou\ \omega=-1-i\\ \iff\ & 2\left(x^2+y^2\right)-2x-i\times 2iy-4=0 && ou\ \omega=-1-i\\ \iff\ & x^2+y^2-x+y-2=0 && ou\ \omega=-1-i\end{aligned}$$

si $\omega=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On remarque que si $x=-1$, $y=-1$ alors $x^2+y^2-x+y-2=0$, on peut donc enlever la seconde condition.
On obtient donc l'équation du lieu de M, à savoir

$$x^2+y^2-x+y-2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}$$

Le lieu de M est donc le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

Exercice 2.37 *On a*

$$\begin{aligned}|a+b|^2 &= (a+b)\overline{(a+b)} = (a+b)\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\\ &= a\overline{a}+a\overline{b}+\overline{a}b+b\overline{b}\\ &= 1+a\overline{b}+\overline{\left(a\overline{b}\right)}+1\\ &= 2+2\,\mathrm{Re}\left(a\overline{b}\right)=3\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{Re}\left(a\overline{b}\right)=\frac{1}{2}$$

Or

$$\begin{aligned}|a-b|^2 &= a\overline{a}-a\overline{b}-\overline{a}b+b\overline{b}\\ &= 2-2\,\mathrm{Re}\left(a\overline{b}\right)=1\end{aligned}$$

Un exemple de complexes est donné par $a=e^{i\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$ *et* $b=\overline{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}$.

Exercice 2.38 *Si* $|z|\neq 1$, *on a* $z\neq 1$, *ainsi*

$$\frac{1-z^n}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}z^k$$

en passant au module, avec l'inégalité triangulaire généralisée, il vient

$$\frac{1-z^n}{1-z}=\left|\sum_{k=0}^{n-1}z^k\right|\leq\sum_{k=0}^{n-1}|z|^k=\frac{1-|z|^n}{1-|z|}$$

Exercice 2.39 *On a* $\dfrac{1}{z_k}=\overline{z_k}$ *ainsi* $z=\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z_k\right)\overline{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z_k\right)}=\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z_k\right|^2$ *est le module d'un complexe au carré donc est bien un réel au carré. De plus l'inégalité triangulaire nous donne*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|\leq\sum_{k=1}^{n}|z_k|=n$$

soit en élevant au carré

$$\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2=n^2$$

Exercice 2.40 *Si* $z=\rho e^{i\theta}$ *alors* $z^2=\rho e^{2i\theta}$ *ainsi* $\mathrm{Re}\left(z^2\right)=\rho^2\cos 2\theta=\rho^2\left(2\cos^2\theta-1\right)=2\,\mathrm{Re}\,(z)^2-|z|^2$.

Exercice 2.41 *Sous forme algèbrique, on cherche* $z=a+ib$ *avec* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *tel que* $z^2=1+i$. *On obtient*

$$\left\{\begin{array}{c}a^2-b^2=1\\ a^2+b^2=\sqrt{2}\ \textit{(équation aux modules)}\\ 2ab=1>0\end{array}\right.$$

d'où $2a^2=\sqrt{2}+1$ *et* $2b^2=\sqrt{2}-1$. *Puisque a et b sont de même signe, on obtient les deux racines deuxièmes*

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\ \text{et}\ -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

Sous forme polaire, $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ *ainsi les racines deuxièmes sont* $\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}=\sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ *et* $-\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$. *Puisque* $\cos\frac{\pi}{8}>0$ *et* $\sin\frac{\pi}{8}>0$, *on a*

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}=\sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{8} &= \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\\ \sin\frac{\pi}{8} &= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}\\ \tan\frac{\pi}{8} &= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2}-1\end{aligned}$$

Exercice 2.42 *On pose* $z=a+ib$ *alors*

$$4z^2+8|z|^2-3=0\Longleftrightarrow 12a^2+4b^2-3+8iab=0$$

Par unicité des parties réelles et imaginaires, on a

$$\left\{\begin{array}{c}12a^2+4b^2-3=0\\ 8ab=0\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c}12a^2+4b^2-3=0\\ a=0 \text{ ou } b=0\end{array}\right.$$

Ce qui donne

$$z=\frac{1}{2} \text{ ou } z=-\frac{1}{2} \text{ ou } z=\frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z=-\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 2.43 *Soient* α,β,γ,q *et* r *les affixes des points* A, B, C, Q *et* R, *on a*

$$q=\frac{\alpha+\gamma}{2} \text{ et } r=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

La condition $(BP)\perp(CR)$, *s'écrit*

$$\frac{r-\gamma}{q-\beta}\in i\mathbb{R}\Longleftrightarrow\frac{r-\gamma}{q-\beta}=-\overline{\left(\frac{r-\gamma}{q-\beta}\right)}\Longleftrightarrow(r-\gamma)\left(\overline{q}-\overline{\beta}\right)+(\overline{r}-\overline{\gamma})(q-\beta)=0$$

soit

$$(\alpha+\beta-2\gamma)\left(\overline{\alpha}+\overline{\gamma}-2\overline{\beta}\right)+\left(\overline{\alpha}+\overline{\beta}-2\overline{\gamma}\right)(\alpha+\gamma-2\beta)=0$$

qui en développant donne

$$2\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\gamma}+\overline{\alpha}\gamma-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+5\gamma\overline{\beta}+5\overline{\gamma}\beta-4\beta\overline{\beta}-4\gamma\overline{\gamma}=0$$

La condition $b^2+c^2=5a^2$ *s'écrit* $|\alpha-\gamma|^2+|\alpha-\beta|^2-5|\beta-\gamma|^2=0$ *soit*

$$(\alpha-\gamma)\overline{(\alpha-\gamma)}+(\alpha-\beta)\overline{(\alpha-\beta)}-5(\beta-\gamma)\overline{(\beta-\gamma)}=0$$

ou encore

$$(\alpha-\gamma)(\overline{\alpha}-\overline{\gamma})+(\alpha-\beta)\left(\overline{\alpha}-\overline{\beta}\right)-5(\beta-\gamma)\left(\overline{\beta}-\overline{\gamma}\right)=0$$

en développant, on obtient exactement la même condition.

Exercice 2.44 *On a* $z(1-z)=z-z^2=-\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$. *Ainsi, si* $z\in D$, *on a*

$$\left|f(z)-\frac{1}{2}\right|=\left|-\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right|\leq\left|\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\right|+\frac{1}{4}\leq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

ce qui prouve que $f(z)\in D$.

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

2 Les techniques

Exercice 2.45 *On a*

$$\begin{aligned}(|a+b|+|a-b|)^2 &= |a+b|^2+|a-b|^2+2\left|a^2-b^2\right| \\ &= (a+b)\overline{(a+b)}+(a-b)\overline{(a-b)}+2\left|a^2-b^2\right| \\ &= |a|^2+a\overline{b}+\overline{a}b+|b|^2+|a|^2-a\overline{b}-\overline{a}b+|b|^2+2\left|a^2-b^2\right|\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(|a+b|+|a-b|)^2-(|a|+|b|)^2 &= 2\left|a^2-b^2\right|+|a|^2+|b|^2-2\,|a|\,|b| \\ &= 2\left|a^2-b^2\right|+(|a|-|b|)^2\geq 0\end{aligned}$$

Puisque $|a+b|+|a-b|$ *et* $|a|+|b|$ *sont positifs, ils sont rangés dans le même ordre que leur carrés.*
De plus il y a égalité si et seulement si $a^2=b^2$ *(i.e.* $a=\pm b$*).*
Remarque : *on peut aussi écrire que avec* $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ *, en utilisant* $z=a+b$ *et* $z'=a-b$*, on obtient*

$$2\,|a|\leq|a+b|+|a-b|$$

puis avec $z=a+b$ *et* $z'=b-a$

$$2\,|b|\leq|a+b|+|a-b|$$

en sommant, il vient le résultat. L'étude du cas d'égalité est alors moins rapide.....

Exercice 2.46 *Posons* $Z=\dfrac{z-ab\overline{z}-a+b}{a-b}$*, alors* $Z+\overline{Z}=\dfrac{z+ab\overline{z}-a+b}{a-b}+\dfrac{\overline{z}+\overline{a}\overline{b}z-\overline{a}+\overline{b}}{\overline{a}-\overline{b}}$ *puisque* a *et* b *sont de module* 1*, on a* $\overline{a}=\dfrac{1}{a}$ *et* $\overline{b}=\frac{1}{b}$*. Ainsi* $Z+\overline{Z}=\dfrac{z+ab\overline{z}-a+b}{a-b}+\dfrac{\overline{z}+\frac{1}{ab}z-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$
$=\dfrac{z+ab\overline{z}-a+b}{a-b}+\dfrac{ab\overline{z}+z-b+a}{b-a}=-2$

Exercice 2.47 *Posons* $\alpha=\arg(a)$*, alors* $z^n=a\Longleftrightarrow\exists k\in\{0,..,n-1\}$*,* $z=z_k=e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$*.*
D'où $1+z_k=1+e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}=2\cos\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)}$ *et* $(1+z_k)^n=2^n\cos^n\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+k\pi\right)}$
$=(-1)^k\,2^n\cos^n\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.
On en déduit que $\arg(z_k)=\frac{\alpha}{2}$ $(\boldsymbol{\pi})$*, les* M_k *sont alignés avec le point* O *sur la droite qui fait un angle de* $\frac{\alpha}{2}$ *avec* O_x*.*

Exercice 2.48 *Soit* $z\in\mathbb{C}$*, on définit* $z'=\dfrac{iz}{z-2i}$ *lorsque* $z\neq 2i$*. On note* M,M',A,B *les points d'affixe* $z,z',2i,i$ *respectivement.*

1. *On a* $AM=|z-2i|$*,* $BM'=|z'-i|=\left|\dfrac{iz}{z-2i}-i\right|=\dfrac{2}{|z-2i|}$ *d'où* $AM\times BM'=2$*.*

   Ensuite, $M\in C(A,R)\Longleftrightarrow AM=R\Longleftrightarrow BM'=\dfrac{2}{R}\Longleftrightarrow M'\in C\left(B,\dfrac{2}{R}\right)$

   Le point M' *décrit un cercle centré en* B *de rayon* $\dfrac{2}{R}$*.*

2. *On a* $\left(\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{AM}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{BM'}}\right)=Arg\,(z-2i)+Arg\,(z'-i)\ \ (2\pi)$ *. Mais* $z'-i=\dfrac{iz}{z-2i}-i=-\dfrac{2}{z-2i}$ *d'où* $Arg\,(z'-i)=Arg\,(-2)-Arg\,(z-2i)=\pi-Arg\,(z-2i)$*. Ainsi* $\left(\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{AM}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{BM'}}\right)=\pi$*.*

   Ensuite, M *décrit une droite passant par* A *si et seulement si* $\left(\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{AM}}\right)$ *est constant. Dans ce cas* $\left(\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{BM'}}\right)$ *est constant et ainsi* M' *décrit une droite passant par* B*.*

Exercice 2.49

1. M,P *et* Q *alignés.*$\Longleftrightarrow\frac{z^3-z}{z^2-z}\in\mathbb{R}$ *ou* $z^2=z\Longleftrightarrow z+1\in\mathbb{R}$ *ou* $z=0$ *ou* $z=1\Longleftrightarrow z\in\mathbb{R}$*.*
   Le lieu cherché est l'axe O_x

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

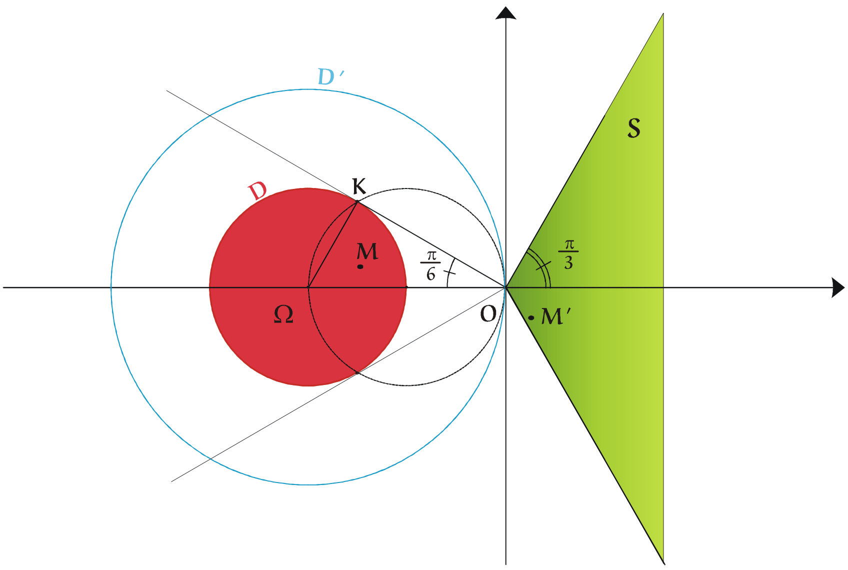
2. *M, P et Q forment un triangle équilatéral* $\Longleftrightarrow \begin{cases} |z^3 - z| = |z^2 - z| \\ |z^2 - z| = |z^3 - z^2| \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |z|\,|z-1|\,|z+1| = |z|\,|z-1| \\ |z|\,|z-1| = |z|^2\,|z-1| \end{cases}$ *On traite à part les cas $z = 0$ ou $z = 1$ (les trois points son confondus), on peut alors supposer $z \neq 0$ et $z \neq 1$. On obtient alors $\begin{cases} |z+1| = 1 \\ |z| = 1 \end{cases}$. Le point M est donc sur le cercle centré en $A(-1)$ et de rayon 1 et sur le cercle trigonométrique. La seule possibilité est $z = j$ ou $z = j^2$.*

Exercice 2.50 *Avant tout un peu de réflexion. L'hypothèse donnée permet de localiser géométriquement le point M d'affixe z. La conclusion demandé est du même type sur le point d'affixe z^2. Si on passe au carré, le module est élevé au carré et l'argument est doublé. On va donc s'intéresser à l'argument, en espérant pouvoir encadrer celui de z, et en déduire où est M' d'affixe z'.*
Soit Ω d'affixe -1, M et M' d'affixe z et z^2 respectivement. Par hypothèse M est dans le disque ouvert D (en rouge sur le schéma), de centre Ω et de rayon $\dfrac{1}{2}$. Ayant ainsi localisé z, on encadre son argument. Si on considère les tangentes à D issues de l'origine O, elles coupent D en K et K'. L'angle $\widehat{KO\Omega}$ est égal à $\dfrac{\pi}{6}$ (son sinus est $\dfrac{\Omega K}{O\Omega} = \dfrac{1}{2}$). On en déduit que l'argument de z est compris entre $\pi - \dfrac{\pi}{6}$ et $\pi + \dfrac{\pi}{6}$ (à 2π près). Puisque $\arg z^2 = 2\arg z \quad (2\pi)$, on a

$$-\frac{\pi}{3} \leq \arg z^2 \leq \frac{\pi}{3}$$

Le point M' est donc dans le secteur angulaire S (en vert sur le schéma). Il est donc à l'extérieur du disque D' (de bord bleu) de centre Ω et de rayon 1. Ceci se traduit par

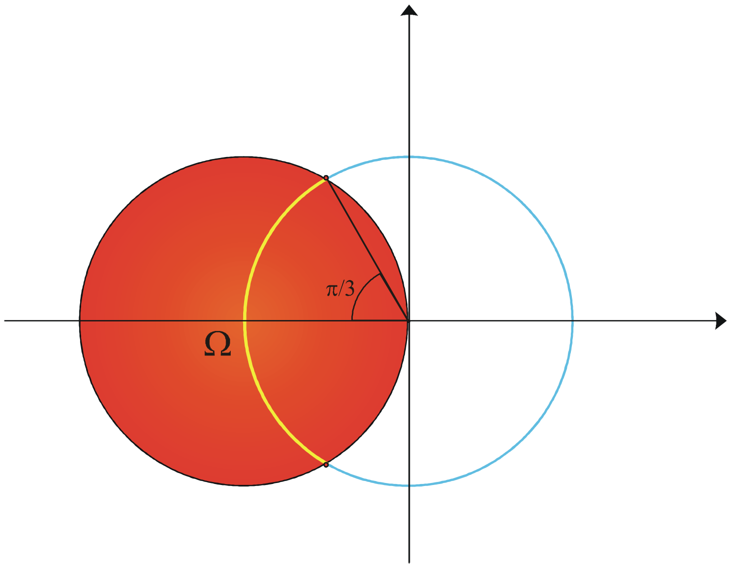
$$\Omega M' = \left|z^2 + 1\right| > 1$$



Exercice 2.51 *On peut envisager une approche géométrique comme dans l'exercice précédent. Les hypothéses permettent de localiser M d'affixe z. La condition $|z+1| < 1$ signifie que M est à l'intérieur du disque centré en Ω d'affixe -1 et de rayon 1 (en rouge). La condition $|z| = 1$ signifie que M est sur le cercle centré en O et de rayon 1 (en bleu). Le point M est donc sur l'arc de cercle jaune, l'argument (dont on prend la valeur dans $[0, 2\pi]$) de z vérifie alors*

$$\pi - \frac{\pi}{3} < \arg z < \pi + \frac{\pi}{3}$$

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009



On en déduit que

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi<\arg z^2<\frac{2\pi}{3}+2\pi$$

Le point N d'affixe z^2 est donc sur l'arc bleu, il est à l'extérieur du disque rouge, cela se traduit par

$$\left|z^2+1\right|>1$$

Remarque : *On peut aussi poser que $z=e^{i\theta}$, alors $|1+z|=\left|2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}\right|=2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$. Ainsi*

$$|1+z|<1\Longleftrightarrow-\frac{1}{2}<\cos\frac{\theta}{2}<\frac{1}{2}$$

ceci permet d'en déduire où se trouve θ. Puis on termine l'exercice en utilisant $\left|1+z^2\right|=2\left|\cos\theta\right|$.
Remarque 2 : *On peut également procéder ainsi. Par hypothèse, $|1+z|^2=1+(z+\overline{z})+z\overline{z}=2+(z+\overline{z})<1$. On en déduit que $(z+\overline{z})<-1$. D'où $(z+\overline{z})^2=z^2+2z\overline{z}+\overline{z}^2>1\Longleftrightarrow\left(z^2+\overline{z}^2\right)>-1$. Mais $\left|1+z^2\right|^2=2+\left(z^2+\overline{z}^2\right)$ ce qui prouve que $\left|1+z^2\right|>1$.*
Pour finir , si on pose $z=\frac{u}{v}$ ($v\neq0$ car $|v|>1$), on a $|z|=\frac{|u|}{|v|}=1$. D'après ce que l'on vient de voir, ou bien $|1+z|\geq1$, ou bien $|1+z|<1$ et alors $\left|1+z^2\right|>1$.
On a donc

$$\left|1+\frac{u}{v}\right|\geq1 \text{ ou } \left|1+\frac{u^2}{v^2}\right|>1$$

ce qui donne

$$|u+v|\geq|v|\geq1 \text{ ou } \left|u^2+v^2\right|>|v|^2\geq1$$

De plus il y a égalité dans la première égalité si $\frac{u}{v}=e^{\pm\frac{2i\pi}{3}}$ et $|u|=1$ ($=|v|$), dans ce cas on a aussi $\left|u^2+v^2\right|=1$.

Exercice 2.52 *Le quadrilatère $(ABCD)$ est un carré.*
Solution géométrique : On a $a-b=d-c$ donc $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{CD}\right\|$ et $a-d=b-c$ donc $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ ainsi $(ABCD)$ est un parallélogramme. De plus $a-c=i(d-b)$ donc $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BD}\right\|$ les diagonales sont donc égales, et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}}\right)=\frac{\pi}{2}\ (\pi)$ il s'agit d'un losange. Or un losange dont les diagonales sont égales est un carré .
Solution analytique : Soit $z=\frac{a+c}{2}=\frac{b+d}{2}=\frac{a+b+c+d}{4}$ l'isobarycentre de $ABCD$. On a $(z-a)^4=\left(\frac{c-a}{2}\right)^4$, $(z-c)^4=$

$\left(\frac{a-c}{2}\right)^4$, $(z-b)^4 = \left(\frac{d-b}{2}\right)^4$, $(z-d)^4 = \left(\frac{b-d}{2}\right)^4$. *Mais* $(c-a)^4 = (i(b-d))^4 = (b-d)^4$.
Si on pose $\alpha = z-a$, $\beta = z-b$, $\gamma = z-c$ *et* $\delta = z-d$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *sont les racines de* $Z^4 = \alpha^4$, *elles forment un carré.*
On a prouvé l'existence de z *dans la solution analytique.*

Exercice 2.53 *Soit* x *une solution réelle alors* $x^3 + ax - 1 - 3i(x+1) = 0$. *Puisque* $x^3 - ax - 1 \in \mathbb{R}$ *et* $x + 1 \in \mathbb{R}$, *on a* $\operatorname{Im}\left(x^3 - ax - 1 - 3i(x+1)\right) = -3(x+1) = 0 \iff x = -1$. *Si on remplace* z *par* -1, *on obtient* $a = -2$.
On factorise ensuite $x^3 - 2x - 1 - 3i(x+1) = (x+1)\left(x^2 - x - (3i+1)\right)$. *Le discriminant est* $\Delta = 1 + 4(3i+1) = 5 + 12i$. *On cherche une racine deuxième sous la forme* $\delta = \alpha + i\beta$. *De* $\delta^2 = \Delta$, *on déduit que* $\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 5 \\ 2\alpha\beta = 12 \geq 0 \end{cases}$.
L'équation aux modules donne $|\delta|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. *En combinant, on a* $\alpha^2 = 9$, $\beta^2 = 4$. *Une racine deuxième de* Δ *est* $\delta = 3 + 2i$. *Les autres solutions de* (E) *sont alors* $z_1 = \dfrac{1+\delta}{2} = 2 + i$ *et* $\dfrac{1-\delta}{2} = -1 - i$.

Exercice 2.54 *Soit* $s = r_C \circ r_B \circ r_A$, *dans* s *le point* B *joue un rôle particulier (il est au milieu). On peut placer l'origine du plan en* B, *ainsi l'affixe de* B *est égale à* 0. *On peut également supposer que l'affixe de* c *est égale à* 1 *(ce qui revient à prendre* BC *comme unité de longueur). Soit* M *d'affixe* z, *on note* z_1, z_2 *et* z_3 *les affixes de* $M_1 = r_A(M)$, $M_2 = r_B(M_1)$ *et* $M_3 = r_C(M_2)$. *On sait alors que si* $u = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\begin{aligned} z_1 &= a + u(z-a) \\ z_2 &= uz_1 \\ z_3 &= 1 + u(z_2 - 1) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} z_3 &= 1 + u\left(ua + u^2(z-a) - 1\right) \\ &= u^3 z - u^3 a + u^2 a + 1 - u \\ &= -z + \left(1 + u^2\right)a + (1-u) \\ & \quad -z + ua + (1-u) \end{aligned}$$

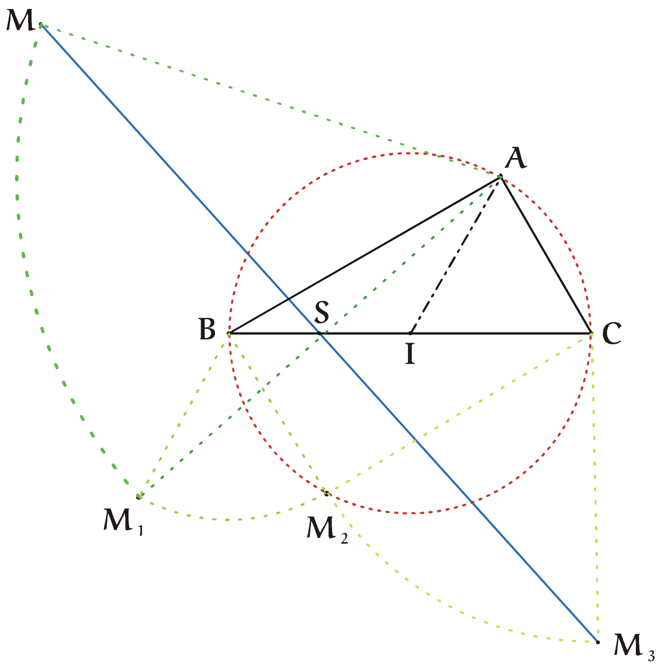
car $u^3 = -1$, $u^2 = j$ *donc* $1 + u^2 = -j^2 = u$. *La transformation* s *est donc une symétrie centrale, le point fixe (qui est le centre) est*

$$\sigma = \frac{z + z_3}{2} = \frac{ua + (1-u)}{2}$$

(que s *soit un symétrie centrale n'a rien de surprenant quand on sait ce que donne la composée de deux rotations)*
S *est le milieu de* $[B, I]$ *équivaut à*

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{4} \iff ua + (1-u) = \frac{1}{2} \\ &\iff a = 1 - \frac{1}{2u} = \frac{3}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

Le point A *est donc sur le cercle centré en* I *et de rayon* $\dfrac{1}{2}$, *ce cercle est le cercle de diamètre* $[A, B]$, *l'angle au sommet* A *du triangle* (ABC) *est égal à* $\dfrac{\pi}{2}$. *De plus* $\widehat{IC, IA} = \dfrac{\pi}{3}$ *et* $IC = IA$, *le triangle* AIC *est équilatéral et l'angle au* *sommet C du triangle (ABC) est égal à $\dfrac{\pi}{3}$.*



Exercice 2.55 *Le triangle (ABC) est équilatéral si et seulement si $AB = AC$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \pm\dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$. Ceci se traduit par $|b-a| = |c-a|$ et $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \pm\dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$. On a donc*

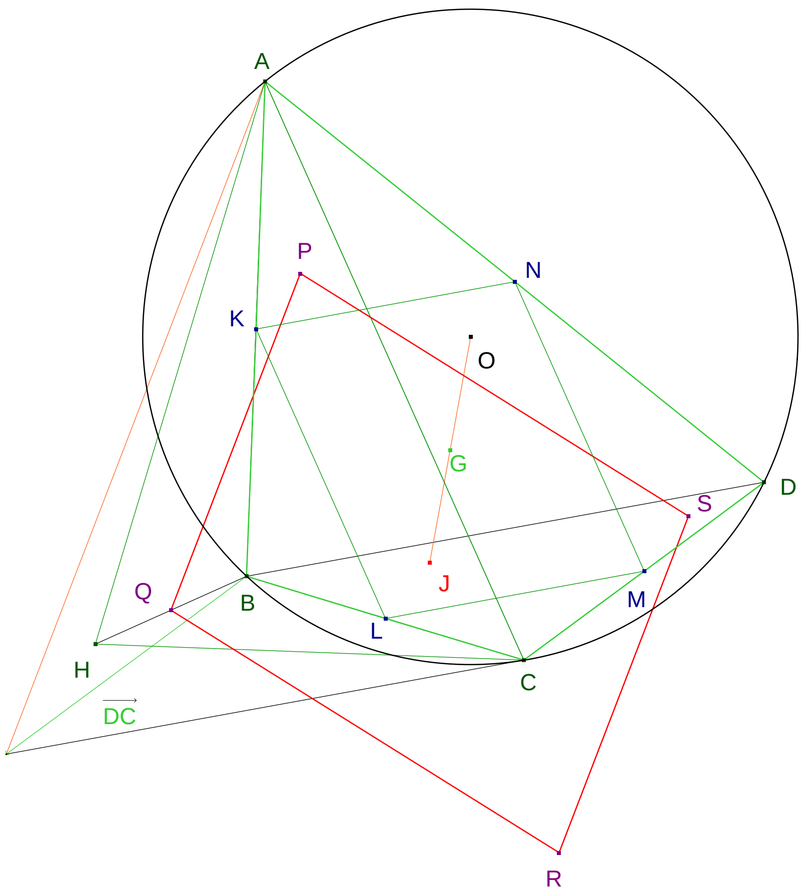
$$\begin{aligned}
(ABC) \text{ est équilatéral} &\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{\pm\, i\frac{\pi}{3}} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{c-a}{b-a} - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(\frac{c-a}{b-a} - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left((c-a) + j^2(b-a)\right)\left((c-a) + j(b-a)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(c + j^2 b + ja\right)\left(c + jb + j^2 a\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc
\end{aligned}$$

Remarque : *On peut également dire que (ABC) est équlatéral direct si et seulement si C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, ce qui donne $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) = -j^2(b-a) \Longrightarrow c = -ja - j^2 b$ immédiatement.*

Exercice 2.56 *1. Le fait que O soit le centre du cercle circonscrit à (ABC) permet d'affirmer que $|a| = |b| = |c| = R$ où R est le rayon de cercle. En particulier, on a $|a|^2 = a\overline{a} = R^2$ donc $\overline{a} = \dfrac{R^2}{a}$. De même $\overline{b} = \dfrac{R^2}{b}$ et $\overline{c} = \dfrac{R^2}{b}$. Posons $h = a + b + c$, il faut prouver que le point H d'affixe h est bien l'orthocentre de (ABC). Par symétrie des rôles, il suffit de prouver que $(AH) \perp (BC)$ i.e. que $\dfrac{h-a}{b-c} \in i\mathbb{R}$. Ceci est facile car*

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{h-a}{b-c}\right)} &= \overline{\left(\frac{b+c}{b-c}\right)} = \frac{\overline{b}+\overline{c}}{\overline{b}-\overline{c}} \\
&= \frac{\dfrac{R^2}{b} + \dfrac{R^2}{c}}{\dfrac{R^2}{b} - \dfrac{R^2}{c}} = -\frac{b+c}{b-c}
\end{aligned}$$

2. *La suite est un peu plus difficile. On sait que l'othocentre de* (ABC) *a pour affixe* $a+b+c$.



Les points K *et* L *sont les images de* A *et* C *par l'homothétie de centre* B *et de rapport* $\frac{1}{2}$. *Si* Q *est l'orthocentre de* (BKL) *et* q *sont affixe, on a* $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$ *d'où* $q-b=\frac{1}{2}(h-b)=\frac{1}{2}(a+c)\iff q=b+\frac{a+c}{2}$. *De même les affixes de* P,R *et* S *(cf. figure) sont* $p=a+\frac{b+d}{2}$, $r=c+\frac{b+d}{2}$ *et* $s=d+\frac{a+c}{2}$.
On peut maintenant conclure, l'affixe de $\overrightarrow{PQ}$ *est* $q-p=b+\frac{a+c}{2}-\left(a+\frac{b+d}{2}\right)=\frac{b-a}{2}+\frac{c-d}{2}$ *donc* $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}\right)$. *De même* $\overrightarrow{SR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}\right)$ *(calculer* $r-s$ *ou faire une double permutation des variables).*
L'isobarycentre G *de* $(ABCD)$ *a pour affixe* $\frac{a+b+c+d}{4}$, *et celui de* $(PQRS)$, *noté* J *a pour affixe* $\frac{p+q+r+s}{4}=\frac{a+b+c+d}{2}$. *Le point* G *est donc le milieu de* $[O,J]$.
Pour les aires, quitte à renommer les points, on peut supposer que $(ABCD)$ *est direct (i.e. on passe par* A,B,C *et* D *en parcourant le cercle dans le sens direct). Dans ce cas, l'aire de* $(ABCD)$ *est égale à*

$$\mathcal{A}_1=\frac{1}{2}\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{AC}\right)$$

L'aire de $(PQRS)$ *est* $\mathcal{A}_2=\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{RS},\overrightarrow{RQ}\right)$. *On sait que* $\overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}\right)$, *un calcul simple (celui de* $q-r$*) donne*

$$\overrightarrow{RQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)\right)=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{RS}$$

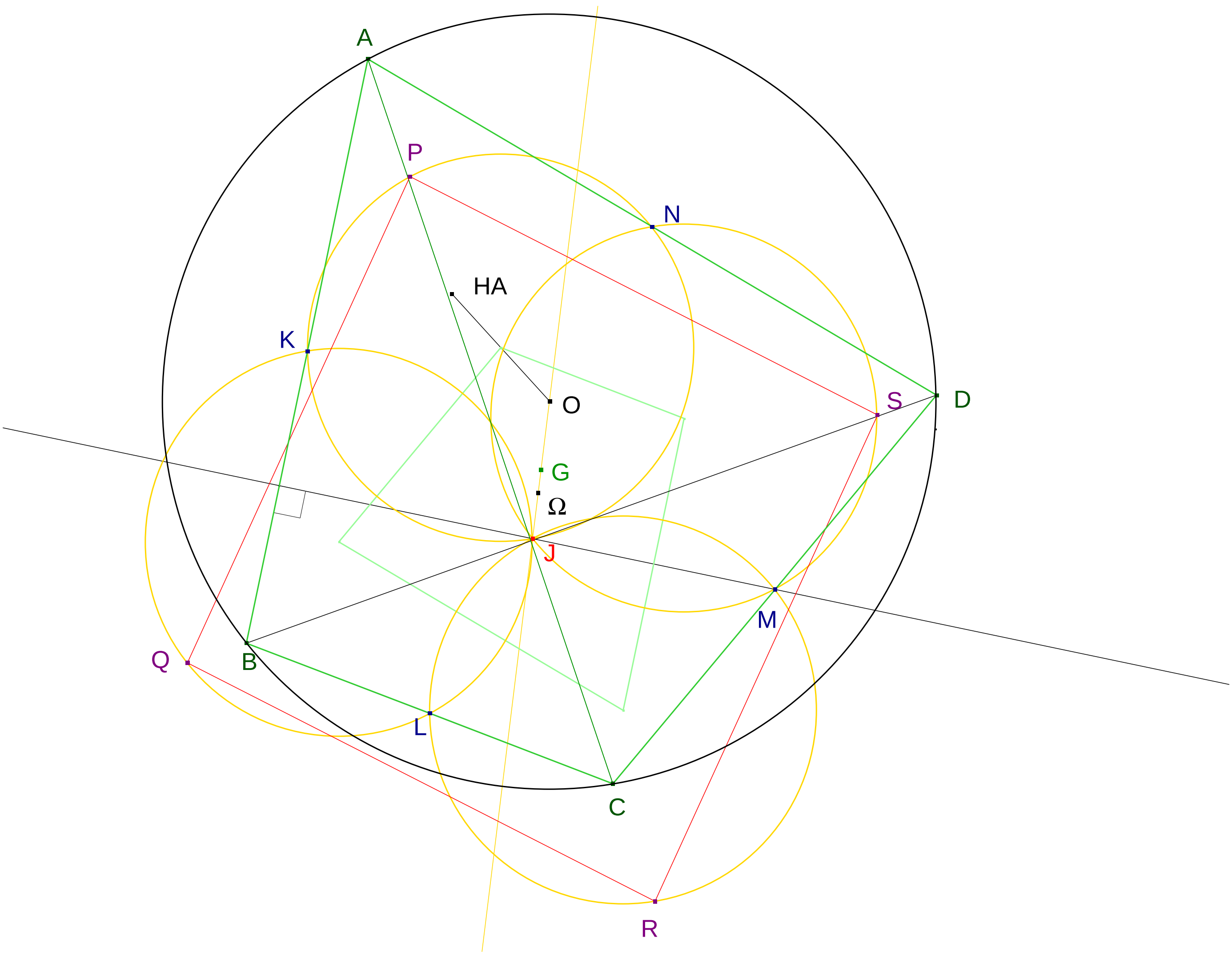
D'où $\mathcal{A}_2 = \text{Det}\left(\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{RS}\right) = \text{Det}\left(\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{CA}\right)$.
Or

$$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DB}\right)$$

Ainsi

$$\mathcal{A}_2 = \text{Det}\left(\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{CA}\right) = \text{Det}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DB}\right), \overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{2}\text{Det}\left(-\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{2}\text{Det}\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC}\right) = \mathcal{A}_1$$

Remarque 1 : *Le quadrilatère $(KLMN)$ est aussi un parallélogramme (dit de Varignon de $(ABCD)$, cf. exercice 2.27) dont l'aire est égale à la moitié de celle de $(ABCD)$.*
Remarque 2 : *Je ne résiste pas au plaisir de signaler les résultats suivants : les cercles circonscrits aux triangles (KPN), (LQK), (MRL) et (MSN) sont concourants en J, centre de $(PQRS)$ (Le point J est le centre d'Euler ou anticentre de $(ABCD)$).*



Le centre du cercle circonscrit à (KPN) est le centre du cercle d'Euler de (ABD), i.e. le milieu de $[A, H_A]$ où H_A est l'orthocentre de (ABD), les centres des quatre cercles sont les sommets d'un quadrilatère homothétique de $(ABCD)$ par l'homothétie de centre Ω d'affixe $\dfrac{a+b+c+d}{3}$. Le point Ω est aligné avec O, G et J sur la droite d'Euler du quadrilatère $(ABCD)$ et les points O, Ω, G et J forment une division harmonique (i.e.

GÉRY HUVENT - EPSILON MATHS -(C) 2009

$\dfrac{\overline{GO}}{\overline{G\Omega}} \div \dfrac{\overline{JO}}{\overline{J\Omega}} = -1$).
Enfin les 6 perpendiculaires à un côté du quadrilatère $ABCD$ passant par le milieu du côté opposé sont concourantes en E (par exemple la droite (MJ) est perpendiculaire à (AB)).

Exercice 2.57 *Attention, il est bien précisé que u et v sont des complexes, on a donc aucune raison d'avoir $|z|^2 = u^2+v^2$! En revanche, on a*

$$|z|^2 = z\overline{z} = (u+iv)\left(\overline{u+iv}\right) = (u+iv)\left(\overline{u} - i\overline{v}\right)$$

De plus, la factorisation suivante est toujours vraie

$$u^2+v^2 = (u+iv)(u-iv)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |z|^2 &= u^2+v^2 \iff (u+iv)\left(\overline{u}-i\overline{v}\right) - (u+iv)(u-iv) = 0 \\ &\iff (u+iv)\left(\overline{u} - u - i\overline{v} + iv\right) \\ &\iff \begin{cases} u+iv = 0 \\ ou \\ u - \overline{u} = i\left(v - \overline{v}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ & ou \\ i\,\mathrm{Im}\,(u) &= -\,\mathrm{Im}\,(v) \end{aligned}$$

Si $z \neq 0$, on a donc égalité entre un réel et un imaginaire pur, ils sont donc tous les deux nuls. En conclusion, une CNS est $z=0$ ou que u et v soient réels !

Exercice 2.58 *On écrit que*

$$\left(z^2+1\right)^n = (z-i)^{2n} \iff \left(\frac{z^2+1}{(z-i)^2}\right)^n = 1$$

mais comme on ne divise pas par 0, on se pose alors la question de savoir si $z=i$ est solution.On remplace donc par $z=i$, et surprise, $z=i$ est solution. On écrit alors que $z^2+1 = (z-i)(z+i)$, l'équation devient

$$(z-i)^n\left[(z+i)^n - (z-i)^n\right] = 0 \iff \begin{cases} z = i \\ ou \\ (z+i)^n = (z-i)^n \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned} (z+i)^n - (z-i)^n &\iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \text{ car } z=i \text{ n'est pas solution} \\ &\iff \exists k \in \{0,\cdots,n-1\},\ \frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in \{0,\cdots,n-1\},\ z\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -i\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) \end{aligned}$$

Puisque $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 1$ si et seulement si k est un mutiple de n, le cas $k=0$ ne se présente pas, on a donc

$$(z+i)^n - (z-i)^n \iff \exists k \in \left\{\boxed{1},\cdots,n-1\right\},\ z = -i\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}} = -i\frac{2\cos\dfrac{k\pi}{n}e^{\frac{ik\pi}{n}}}{-2i\sin\dfrac{k\pi}{n}e^{\frac{ik\pi}{n}}} = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

Les solutions de l'équation sont donc

$$i \text{ et les } \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ pour } k \in \{1, \cdots, n-1\}$$

La racine i est mutiple d'ordre n.

Exercice 2.59 *Notons z_1, z_2 et z_3 les racines troisièmes de z telles que $MM_1M_2M_3$ soit un parallèlogramme. On a alors $z + z_2 = z_1 + z_3$. On sait également que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ (car $z_2 = jz_1$ et $z_3 = j^2 z_1$), et puisque $z_2^3 = z$, il vient*

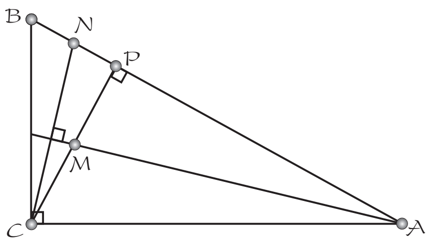
$$z_2^3 + z_2 = -z_2 \Longrightarrow z_2^3 + 2z_2 = 0$$

Ainsi $z_2 = 0$ (le parallèlogramme est réduit à un point) ou $z_2 = \varepsilon i\sqrt{2}$ où $\varepsilon = 1$. Dans ce cas $z = -2\varepsilon i\sqrt{2}$, $z_1 = jz_2$ et $z_3 = j^2 z_2$. On a bien

$$\begin{aligned} z + z_2 &= -z_2 \\ z_1 + z_3 &= \left(j + j^2\right) z_2 = -z_2 \end{aligned}$$

Rappel : Si a est une racine troisième de $z \neq 0$, alors $z = a^3$, donc l'équation $Z^3 = a^3$ équivaut à $\left(\frac{Z}{a}\right)^3 = 1$, qui donne $\frac{Z}{a} = 1$ ou j ou j^2. Ainsi les deux autres racines troisièmes sont bien ja et $j^2 a$.

Exercice 2.60 *Comme indiqué on remarque que les triangles APC et CPB sont images par une similitude directe.*



On place l'origine du plan complexe en C, les lettres minuscules désignent les affixes. Soit s la similitude qui transforme APC en CPB, alors s a pour écriture complexe $s(z) = \alpha z + \beta$. On a donc

$$s(a) = 0,\ s(p) = p \text{ et } s(0) = b$$

soit

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha a + \beta = 0 \\ \alpha p + \beta = p \\ \beta = b \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha = -\frac{b}{a} \\ p = \frac{ab}{a+b} \\ \beta = b \end{array}\right.$$

On en déduit $m = \frac{1}{2}\frac{ab}{a+b}$ et $n = \frac{p+b}{2} = \frac{b}{2}\frac{2a+b}{a+b}$. Il s'agit de vérifier que

$$\frac{m-a}{n} \in i\mathbb{R}$$

sachant que $\frac{b}{a}$ est un imaginaire pur (car l'angle en C est droit). Or

$$\frac{m-a}{n} = -\frac{a}{b}$$

En réalité, on a montré non seulement que l'angle est droit, mais en plus que

$$\frac{AM}{CN} = \frac{AC}{BC}$$

Exercice 2.61 *On a*

$$\left|a-\alpha\overline{b}\right|^2=\left(a-\alpha\overline{b}\right)\left(\overline{a}-\overline{\alpha}b\right)=|a|^2+|\alpha|^2|b|^2-2\operatorname{Re}\left(\overline{\alpha}ab\right)$$

Ainsi

$$\left|a-\alpha\overline{b}\right|^2+\left|c-\alpha\overline{d}\right|^2=|a|^2+|c|^2+|\alpha|^2\left(|b|^2+|d|^2\right)-2\operatorname{Re}\left(\overline{\alpha}\left(ab+cd\right)\right)\geq 0$$

On en déduit que

$$2\operatorname{Re}\left(\overline{\alpha}\left(ab+cd\right)\right)\leq|a|^2+|c|^2+|\alpha|^2\left(|b|^2+|d|^2\right)$$

Avec $\alpha=\dfrac{1}{4}$, *on obtient*

$$\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\left(ab+cd\right)\right)\leq|a|^2+|c|^2+\frac{1}{16}\left(|b|^2+|d|^2\right)$$

ce qui donne le résultat en multipliant le tout par 4.
En fait avec $x\in[0,+\infty[$, *on obtient,*

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(ab+cd\right) &\leq \frac{A}{2x}+\frac{xB}{2}\\ \text{où } A &= \left(|a|^2+|c|^2\right)\text{ et } B=\left(|b|^2+|d|^2\right)\end{aligned}$$

La fonction $f\left(x\right)=\dfrac{A}{2x}+\dfrac{xB}{2}$ *admet un minimum en* $x=\sqrt{\dfrac{A}{B}}$, *ainsi*

$$\operatorname{Re}\left(ab+cd\right)\leq\sqrt{\left(|a|^2+|c|^2\right)\left(|b|^2+|d|^2\right)}$$

Exercice 2.62

1. *On a* $\Delta'=\left(y^2-1\right)^2-\left(y^4-6y^2+1\right)=4y^2$, *les racines sont donc* $-y^2+1\pm 2y$.
2. *On en déduit que* $P\left(X\right)=\left(X+y^2+2y-1\right)\left(X+y^2-2y-1\right)$ *(car le coefficient dominant vaut* 1*).*
3. *Puisqu'un module est positif,*

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|=2\Longleftrightarrow\left|z+\frac{1}{z}\right|^2=2\Longleftrightarrow\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}\right)-4=0$$

soit

$$\frac{\left(z\overline{z}\right)^2+z^2+\overline{z}^2+1-4z\overline{z}}{z\overline{z}}=0\Longleftrightarrow|z|^4+\operatorname{Re}\left(z^2\right)-4|z|^2+1=0$$

Avec $z=x+iy$, *on obtient*

$$\left(x^2+y^2\right)^2+2\left(x^2-y^2\right)-4\left(x^2+y^2\right)+1=0$$

soit en développant

$$P\left(x^2\right)=0$$

4. *On a donc*

$$\begin{aligned}\left|z+\frac{1}{z}\right| &= 2\Longleftrightarrow\left(x^2+y^2+2y-1\right)\left(x^2+y^2-2y-1\right)=0\\ &\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x^2+y^2+2y-1=0\\ ou\\ x^2+y^2-2y-1=0\end{array}\right.\\ &\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x^2+\left(y+1\right)^2=2\\ ou\\ x^2+\left(y-1\right)^2=2\end{array}\right.\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble cherché est la réunion de deux cercles, le premier centré en A *de coordonnées* $(-1,0)$, *le second centré en* B *de coordonnées* $(1,0)$ *et tous deux de rayon* $\sqrt{2}$. *Ces deux cercles se coupent aux points de coordonnées* $(1,0)$ *et* $(-1,0)$.

Exercice 2.63

1. *Puisque u est de module 1, on a* $\overline{u} = \dfrac{1}{u}$ *donc*

$$\begin{aligned} \overline{S} &= \overline{u} + \overline{u}^2 + \overline{u}^4 = \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^4} \\ &= \frac{u^3 + u^2 + 1}{u^4} \end{aligned}$$

Mais, u est une racine septième de l'unité donc $u^7 = 1 \Longleftrightarrow u^3 \times u^4 = 1 \Longleftrightarrow u^3 = \dfrac{1}{u^4}$ *d'où*

$$\overline{S} = \left(u^3 + u^2 + 1\right) \times u^3 = u^3 + u^5 + u^6$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} S + \overline{S} &= u + u^2 + u^4 + u^3 + u^5 + u^6 \\ &= u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 \\ &= \frac{u - u^7}{1 - u} \text{ car } u \neq 1 \\ &= -1 \text{ car } u^7 = 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S\overline{S} &= \left(u + u^2 + u^4\right)\left(u^3 + u^5 + u^6\right) \\ &= u^4 + u^6 + u^7 + u^5 + u^7 + u^8 + u^7 + u^9 + u^{10} \\ &= u^4 + u^6 + 1 + u^5 + 1 + u + u^7 \times u + 1 + u^7 \times u^2 + u^7 \times u^3 \\ &= 3 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 \\ &= 2 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} S &= \operatorname{Im}\left(u + u^2 + u^4\right) = \operatorname{Im}\left(\exp\left(\frac{2i\pi}{7}\right) + \exp\left(\frac{4i\pi}{7}\right) + \exp\left(\frac{8i\pi}{7}\right)\right) \\ &= \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} \\ &= \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} \end{aligned}$$

Puisque $0 \leq \dfrac{\pi}{7} < \dfrac{2\pi}{7} \leq \dfrac{\pi}{2}$, *on a* $0 \leq \sin\dfrac{\pi}{7} < \sin\dfrac{2\pi}{7}$ *donc* $\sin\dfrac{2\pi}{7} - \sin\dfrac{\pi}{7} \geq 0$, *de plus* $\sin\dfrac{4\pi}{7} \geq 0$ *car* $\dfrac{4\pi}{7} \in [0, \pi]$ *donc*

$$\operatorname{Im} S > 0$$

2. *On a montré que* $S + \overline{S} = -1$ *et que* $S\overline{S} = 2$, *les nombres S et $\overline{S}$ sont donc solutions de l'équation* $X^2 - (-1)X + 2 = 0$ *dont les racines sont* $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\sqrt{7}$ *et* $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\sqrt{7}$. *On sait de plus que* $\operatorname{Im} S > 0$, *on en déduit que*

$$S = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{7}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(S) &= \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{Im}(S) &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

Exercice 2.64 *On pose $Z = z^4$, on se souvient que $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{j} = j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, on doit ainsi résoudre*

$$Z^2 - 4jZ + 16j^2 = 0$$

Le discriminant (réduit) vaut $\Delta' = 4j^2 - 16j^2 = -12j^2 = \left(2i\sqrt{3}j\right)^2$. Les racines en Z sont donc

$$Z = 2j \pm 2i\sqrt{3}j = 2j\left(1 \pm i\sqrt{3}\right)$$

Soit

$$\begin{aligned} Z_1 &= 2j\left(1 + i\sqrt{3}\right) = -4j \times j^2 = -4 \\ Z_2 &= 2j\left(1 - i\sqrt{3}\right) = -4j \times j = -4j^2 \end{aligned}$$

On résout ensuite

$$z^4 = -4 = 4e^{i\pi} \text{ et } z^4 = -4j^2 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)},\ k = 0, 1, 2, 3 \\ \text{et } z &= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right)},\ k = 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

la première famille de solutions s'écrit $1 + i$, $-1 + i, -1 - i, 1 - i$. La seconde peut s'exprimer sous forme cartesienne, mais cela passe par le calcul de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 2.65 *Le complexe α est une racine cinquième de 1, donc $\alpha^5 = 1$. On a $1 + a + b = 1 + \alpha + \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha^3 = \dfrac{1 - \alpha^5}{1 - \alpha} = 0$ car $\alpha \neq 0$ donc*

$$a + b = -1$$

et $ab = \left(\alpha^2 + \alpha^3\right)\left(\alpha + \alpha^4\right) = \alpha^7 + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^3$ or $\alpha^6 = \alpha^5 \times \alpha = \alpha$ et $\alpha^7 = \alpha^5 \times \alpha^2 = \alpha^2$ d'où

$$ab = \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = -1$$

Ainsi a et b sont racines de $x^2 + x - 1 = 0$.
On en déduit que

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ ou } -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ b &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ ou } -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{aligned}$$

Or

$$\operatorname{Im}(a) = \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{12\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{10}\right) + \sin\left(\pi + \frac{2\pi}{5}\right) < 0$$

d'où

$$a = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ et } b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Exercice 2.66

1. *Soit z une telle solution et r sont module, alors*

$$p\,|z|^p = \left|z^{p-1} + z^{p-2} + \cdots + z + 1\right| \leq |z|^{p-1} + \cdots + 1$$

d'où

$$pr^p \leq r^{p-1} + \cdots + 1 = \frac{r^p - 1}{r - 1} \text{ car } r \neq 1$$

On en déduit que

$$pr^p(r-1) \leq r^p - 1 \text{ car } r-1>0 \text{ (on ne change pas le signe de l'inégalité)}$$

Soit f *le polynôme* $f(x) = px^p(x-1) - x^p + 1 = px^{p+1} - (p+1)x^p + 1$, *en tant que polynôme* f *est dérivable et*

$$f'(x) = p(p+1)x^{p-1}(x-1) > 0 \text{ sur }]1,+\infty[$$

On en déduit que f *est strictement croissante sur* $[1,+\infty[$. *Puisque* $f(1)=0$, *on ne peut avoir* $f(r) \leq 0$ *si* $r>1$. *Conclusion le module d'une racine est inférieur ou égal à* 1.

2. *On a* $z^{p-1} + z^{p-2} + \cdots + z + 1 = \dfrac{1-z^p}{1-z}$ *si* $z \neq 1$, *ainsi si* $z = e^{i\theta}$ *est solution de* (E_p)

$$pz^p = pe^{ip\theta} = \frac{1-e^{ip\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{-2i\sin\left(\frac{ip\theta}{2}\right)e^{\frac{ip\theta}{2}}}{-2i\sin\left(\frac{i\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}} \Longrightarrow \frac{\sin(\frac{p\theta}{2})}{p\sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{e^{ip\theta}\times e^{\frac{i\theta}{2}}}{e^{\frac{ip\theta}{2}}} = e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}}$$

On en déduit que $e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}} \in \mathbb{R}$ *d'où son argument est nul à* π *près*

$$\tfrac{p+1}{2}\theta = 0 \ \ (\pi) \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \tfrac{p+1}{2}\theta = k\pi \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ p = \frac{2k\pi - \theta}{\theta}$$

car $\theta \neq 0$. *On obtient alors*

$$e^{i\frac{p+1}{2}\theta} = (-1)^k = \frac{\sin\left(-\frac{1}{2}\theta + k\pi\right)}{p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -\frac{(-1)^k}{p} \Longrightarrow p = -1$$

ce qui est absurde. Les solutions de (E_p), *différentes de* 1 *sont toutes de module strictement inférieur à* 1 *(elles sont dans le disque unité).*

3 Les exotiques

Exercice 2.67 *On a* $z \neq 1$ *donc* $\left|1+z+z^2+\ldots+z^9\right| = 1 \Leftrightarrow \left|z^{10}-1\right| = |z-1| \Leftrightarrow \left|z^{10}-1\right|^2 = |z-1|^2$ $\Leftrightarrow \left(z^{10}-1\right)\left(\overline{z}^{10}-1\right) = (z-1)(\overline{z}-1) \Leftrightarrow (z\overline{z})^{10} - z^{10} - \overline{z}^{10} = z\overline{z} - z - \overline{z}$. *Mais* $(z\overline{z})^{10} = 1^{20} = 1$, *et* $\overline{z} = \frac{1}{z}$, *on obtient donc* $z^{10} + \frac{1}{z^{10}} = z + \frac{1}{z} \Leftrightarrow z^{20} + 1 - z^{11} - z^9 = 0$. *Il suffit de remarquer que* $\left(z^{11}-1\right)\left(z^9-1\right) = z^{20}+1-z^{11}-z^9$.
Autre méthode : $\left|1+z+z^2+\ldots+z^9\right| = \left|\dfrac{z^{10}-1}{z-1}\right| = \left|\dfrac{\sin(5\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right|$ *si* $z = e^{i\theta}$. *On doit donc résoudre* $|\sin(5\theta)| = \left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$
...

Exercice 2.68 $(z+|z|)^2 = z^2 + 2|z|z + |z|^2 = z^2 + 2|z|z + z\overline{z} = z(z+\overline{z}+2|z|) = 2z(\mathrm{Re}(z)+|z|)$. *Or* $\mathrm{Re}(z)+|z| \neq 0$ *donc*

$$z = \left(\frac{z+|z|}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}(z)+2|z|}}\right)^2$$

et l'on a les deux racines deuxièmes.

Exemple : Pour $z = 5+12i$, $|z| = \sqrt{5^2+12^2} = 13$ *ainsi* $z = \left(\dfrac{5+12i+13}{\sqrt{10+26}}\right)^2 = (3+2i)^2$

Exercice 2.69 *Posons* $P(z) = z^4 + (7-i)z^3 + (12-15i)z^2 + (4+4i)z + 16 + 192i$ *et notons* x *la racine réelle, la racine imaginaire pure est alors* ix *ou* $-ix$.
Analyse du problème : On calcule alors $P(x) - P(ix) = 8x^3 + 24x^2 + 8x + i\left(6x^3 - 30x^2\right)$. *Si* x *et* ix *sont les racines cherchées, alors* $P(x) - P(ix) = 0 \Longrightarrow x = 0$ *ou* $x = 5$. *Mais* $P(0) \neq 0$ *et* $P(5) \neq 0$.
On calcule donc $P(x) - P(-ix) = 6x^3 + 24x^2 + i\left(-8x^3 - 30x^2 + 8x\right)$. *Le même raisonnement amène à considérer* $P(0)$ *(qui est différent de* 0 *) et* $P(-4) = 0$. *Les deux racines cherchées sont* -4 *et* $4i$.
Synthèse : On factorise P *par* $(z+4)(z-4i)$, *on obtient* $P(z) = (z+4)(z-4i)\left(z^2+3(1+i)z-12+i\right)$. *Le reste est pur routine,* $\Delta = (3(1+i))^2 - 4(-12+i) = 48+14i$. *Une racine deuxième* $\delta = a+ib$ *est* $7+i$ *(après calcul). Les autres solutions de* (E) *sont donc* $-5-2i$ *et* $2-i$.

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

Exercice 2.70 *On résout l'équation, on a* $\Delta = (1-i)^2 - 4\alpha = -2i - 4\alpha$. *Soit* δ *une racine deuxième de* Δ, *alors les solutions de* (E) *sont* $z_1 = \dfrac{-1+i+\delta}{2}$ *et* $z_2 = \dfrac{-1+i-\delta}{2}$. *Les point* M_1 *et* M_2 *d'affixes* z_1 *et* z_2 *forment un triangle rectangle en* P *si et seulement si*

$$\frac{z_1 - \frac{i}{2}}{z_2 - \frac{i}{2}} \in i\mathbb{R} \text{ ou } z_2 = \frac{i}{2}$$

Or $z_2 = \dfrac{i}{2} \iff \dfrac{-1-\delta}{2} = 0 \iff \delta = -1 \Longrightarrow \delta^2 = \Delta = 1 \Longrightarrow \alpha = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}i$. *Dans ce cas l'autre solution est* $z_1 = -1 + \dfrac{i}{2}$.

Et $\dfrac{z_1 - \frac{i}{2}}{z_2 - \frac{i}{2}} \in i\mathbb{R}$ *donne*

$$\begin{aligned}
\frac{-1+\delta}{-1-\delta} &= -\frac{-1+\overline{\delta}}{-1-\overline{\delta}} \\
\iff & \left(-1+\delta\right)\left(-1-\overline{\delta}\right) + \left(-1+\overline{\delta}\right)\left(-1-\delta\right) = 0 \\
\iff & 2\left(1 - |\delta|^2\right) = 0 \\
\iff & |\delta|^2 = |\Delta| = 1 \\
\iff & \left|\alpha + \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Le point A *d'affixe* α *décrit le cercle centré en* $Q\left(-\dfrac{i}{2}\right)$ *de rayon* $\dfrac{1}{4}$. *Dans ce cas, il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $\alpha = -\dfrac{i}{2} - \dfrac{e^{i\theta}}{4}$, *d'où* $\Delta = -2i - 4\left(-\dfrac{i}{2} - \dfrac{e^{i\theta}}{4}\right) = e^{i\theta} = \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2$ *et les racines sont*

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{-1+i+e^{i\frac{\theta}{2}}}{2} = \frac{i}{2} + i\sin\frac{\theta}{4}e^{i\frac{\theta}{4}} \\
z_2 &= \frac{-1+i-e^{i\frac{\theta}{2}}}{2} = \frac{i}{2} - i\cos\frac{\theta}{4}e^{i\frac{\theta}{4}}
\end{aligned}$$

Exercice 2.71 *On prend* B *d'affixe* 0, $C(1)$, $A(i)$, $Q(a)$, $P(ia)$, $D(1+i)$

On a $(HB) \perp (PC) \iff \dfrac{z}{ia-1} \in i\mathbb{R} \iff z(-ai-1) = -\overline{z}(ia-1)$

On a P, H, C *alignés* $\iff \dfrac{z-1}{ia-1} \in \mathbb{R} \iff (z-1)(-ia-1) = (\overline{z}-1)(ia-1)$

On additionne les deux équations, pour obtenir $(2z-1)(-ia-1) = -(ia-1) \iff 2z - 1 = \dfrac{ia-1}{ia+1}$

$\iff 2z = \dfrac{ia-1}{ia+1} + 1 = 2i\dfrac{a}{ia+1} \iff z = \dfrac{ia}{ia+1}$

On doit vérifier que $(HQ) \perp (HP) \iff \dfrac{z-a}{z-(1+i)} \in \mathbb{R}$.

Mais $\dfrac{z-a}{z-(1+i)} = \dfrac{\frac{ia}{ia+1} - a}{\frac{ia}{ia+1} - (1+i)} = \dfrac{ia - ia^2 - a}{ia - ia + a - 1 - i} = \dfrac{ia(1-a+i)}{-1+a-i} = -ia \in i\mathbb{R}$

Exercice 2.72 1. *Puisque l'angle* $\angle SAP$ *est droit, les points* P *et* S *sont diamètralement opposés sur le cercle. Il* *suffit donc de calculer p (car $s = -p$). Le parallèlisme se traduit par*

$$\frac{p-a}{b-c} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \frac{p-a}{b-c} = \overline{\left(\frac{p-a}{b-c}\right)} = \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}} = \frac{bc}{pa}\frac{p-a}{(b-c)}$$

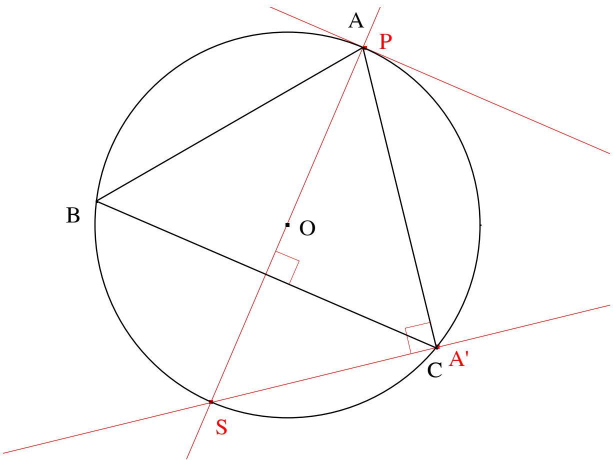
d'où

$$p = \frac{bc}{a},\ s = -\frac{bc}{a}$$

2. *On applique le résultat précédent au triangle (SCA), on en déduit que*

$$a' = -\frac{ac}{s} = -\frac{ac}{-\frac{bc}{a}} = \frac{a^2}{b}$$

Le point A' ne dépend donc pas de C (car a' ne dépend pas de c !). Pour l'identifier, il s'agit de bien placer le point C, la meilleur place est en A' !



Dans ce cas l'angle $\angle ASP$ est droit, $[A,S]$ est un diamètre du cercle. Conclusion : A' est le symétrique de B par rapport à la droite (AO).

3. *D'après* 1. *dans le triangle (CAB) on a (si r est l'affixe de R)*

$$r = \frac{ab}{c}$$

Pour prouver que (PR) est parallèle à la tangente en B au cercle, il suffit de montrer que $(OB) \perp (PR)$, ce qui se traduit par

$$\frac{r-p}{b-0} = \frac{r-p}{b} \in i\mathbb{R}$$

Mais

$$\frac{r-p}{b} = \frac{\frac{ab}{c}-\frac{bc}{a}}{b} = \frac{a^2-c^2}{ca} = -\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{ca}} = -\overline{\left(\frac{r-p}{b}\right)}$$

Exercice 2.73

1. *Le discriminant vaut $\Delta = (1+2i)^2 - 4(-1+i) = 1$, on obtient donc deux racines $z_1 = i$ et $z_2 = 1+i$.*
2. *On a*

$$\begin{aligned} Z^n &= i \Longleftrightarrow Z^n = e^{i\frac{\pi}{2}} \Longleftrightarrow \exists k \in \{0,\cdots n-1\},\ Z = e^{i\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \\ Z^n &= 1+i \Longleftrightarrow Z^n = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \Longleftrightarrow \exists k \in \{0,\cdots n-1\},\ Z = \sqrt[n]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \end{aligned}$$

3. *Les trois points forment un triangle rectangle si et seulement si*

$$\frac{(1+i)^n - 0}{i^n - 0} = \left(\frac{1+i}{i}\right)^n \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow (1-i)^n \in i\mathbb{R}$$

Or $(1-i)^n = 2^n e^{in\frac{7\pi}{4}}$ *donc*

$$\begin{aligned}(1-i)^n &\in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -n\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ n = -2-4k\end{aligned}$$

Les entiers solutions sont donc $-2+4=2,\ -2+8=6,\ \cdots$ *i.e. tous les entiers de la forme* $2+4p$ *où* $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.74 *On pose* $z = x+iy$, *alors* $\dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{1}{z}$. *On en déduit que*

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= (33x-56y) + i\,(56x+33y) \\ &= (33+56i)\,(x+iy) \\ &= (33+56i)\,z\end{aligned}$$

d'où l'équation

$$z^2 = \frac{1}{33+56i}$$

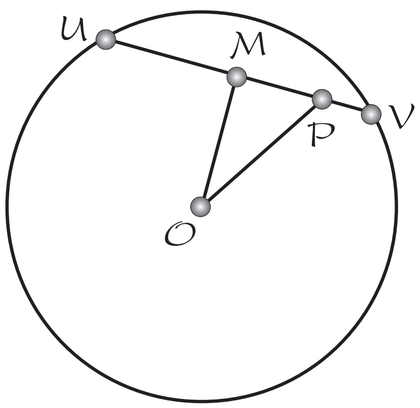
Or un calcul laissé au lecteur (extraction de racine carré) montre que $33+56i = (7+4i)^2$. *Ainsi*

$$z = \pm\frac{1}{7+4i} = \pm\left(\frac{7}{65} - \frac{4}{65}i\right)$$

d'où

$$|x| + |y| = \frac{11}{65}$$

Exercice 2.75 *On fait un dessin, soit* U *et* V *d'affixe* u *et* v *et* M *d'affixe* $\dfrac{u+v}{2}$ *(* M *est le pied de la hauteur issue de* O *dans le triangle isocèle* UOV, *donc* $(OM) \perp (UV)$*). Les points* U *et* V *sont sur le cercle unité, le point* P *d'affixe* $z = au+bv = \dfrac{au+bv}{a+b}$ *et un point du segment* $[U,V]$ *(penser barycentre !).*



On a $|au+bv| = OP$, $\left|\dfrac{u+v}{2}\right| = OM$, *d'après Pythagore,* $OP^2 = OM^2 + MP^2 \Longrightarrow |au+bv| \geq \dfrac{1}{2}|u+v|$. *De plus*

$$OP^2 - OM^2 = MP^2$$

mais

$$\begin{aligned} MP^2 &= \left|au+bv-\frac{u+v}{2}\right|^2 = \left|au+(1-a)\,v-\frac{u+v}{2}\right|^2 \\ &= \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 |u-v|^2 \\ &= \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 (u-v)\left(\overline{u}-\overline{v}\right) \\ &= \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 (u-v)\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right) \\ &= -\frac{1}{uv}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 (u-v)^2 \end{aligned}$$

car u *et* v *sont de module* 1 *donc* $\overline{u}=\frac{1}{u},\ \overline{v}=\frac{1}{v}$.
enfin

$$\begin{aligned} OP^2-OM^2 &= |au+bv|^2-\frac{1}{4}|u+v|^2 = (au+(1-a)\,v)\times\left(\frac{a}{u}+\frac{(1-a)}{v}\right)-\frac{1}{4}(u+v)\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right) \\ &= \frac{1}{uv}(au+(1-a)\,v)\,(av+(1-a)\,u)-\frac{1}{4uv}(u+v)^2 \end{aligned}$$

d'où la factorisation demandée.

Exercice 2.76 *On a*

$$\begin{aligned} 1 &= |1+a_0+\dots+a_{n-1}-a_0-\dots-a_{n-1}| \\ &\leq |1+a_0+\dots+a_{n-1}|+|a_0|+\dots+|a_{n-1}| \end{aligned}$$

d'où

$$|1+a_0+\dots+a_{n-1}|\geq 1-|a_0|-\dots-|a_{n-1}|$$

Ainsi

$$\left|\frac{P(z)}{z^n}\right| = \left|1+\frac{a_{n-1}}{z}+\dots+\frac{a_0}{z^n}\right| \geq 1-\frac{|a_0|}{|z|}-\dots-\frac{|a_{n-1}|}{|z|^n}$$

Si $|z|\geq 1$ *alors* $\frac{1}{|z|^k}\leq 1 \Longrightarrow -\frac{|a_k|}{|z|^k}\geq -|a_k|$ *d'où*

$$\left|\frac{P(z)}{z^n}\right| \geq 1-|a_0|-\dots-|a_{n-1}|>0$$

Exercice 2.77 *On a*

$$\Sigma = C+iS = \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)+i\sin k\theta = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n}\left(e^{i\theta}\right)^k$$

Si $e^{i\theta}\neq 1 \Longleftrightarrow \theta\neq 0\ \ (2\pi)$ *alors*

$$\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i\theta}\right)^k = \frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1} = \frac{2i\sin\frac{(n+1)\,\theta}{2}e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin\frac{(n+1)\,\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{n\theta}{2}}$$

En considèrant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$C = \frac{\sin\frac{(n+1)\,\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{n\theta}{2} \text{ et } S = \frac{\sin\frac{(n+1)\,\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{n\theta}{2}$$

Si $e^{i\theta}=1$, *alors* $\cos k\theta = 1$ *et* $\sin k\theta=0$, *ainsi* $\Sigma=n+1$, $C=n+1$ *et* $S=0$.

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

Exercice 2.78 *Même idée,*

$$\Sigma = C + iS = \sum_{k=0}^{n} \cos^k \theta \left(\cos(k\theta) + i \sin k\theta\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\cos\theta e^{i\theta}\right)^k$$

Si $\cos\theta e^{i\theta} = \cos^2\theta + i\sin\theta\cos\theta = 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos^2\theta = 1 \\ \sin 2\theta = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \theta = 0 \ (\pi)$ *alors* $\Sigma = n+1$, $C = n+1$ *et* $S = 0$.
Sinon

$$\Sigma = \frac{1 - \cos^{n+1}\theta e^{i(n+1)\theta}}{1 - \cos\theta e^{i\theta}}$$

Or

$$\begin{aligned} 1 - \cos x e^{ix} &= 1 - \cos^2 x - i \sin x \cos x = \sin x^2 - i \sin x \cos x = \sin x (\sin x - i \cos x) \\ &= i \sin x (-i \sin x - \cos x) = -i \sin x e^{ix} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{\sin((n+1)\theta) e^{i(n+1)\theta}}{\sin\theta e^{i\theta}} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} e^{in\theta} \\ C &= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \cos n\theta \\ S &= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \sin n\theta \end{aligned}$$

Exercice 2.79

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(ak+b) &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(ak+b)}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{ib} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{iak}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{ib} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{iak} 1^{n-k}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{ib}\left(1 + e^{ia}\right)^n\right) = \operatorname{Re}\left(2^n \cos^n\left(\frac{a}{2}\right) e^{i\left(b + n\frac{a}{2}\right)}\right) = 2^n \cos^n\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(\frac{na}{2} + b\right) \end{aligned}$$

Exercice 2.80

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^k\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)} - 1\right)^n = \operatorname{Re}\left(i \tan(x)\right)^n = \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{n\pi}{2}} \tan^n(x)\right)$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \tan^n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ (-1)^p \tan^{2p}(x) \text{ si } n = 2p \end{cases}$$

Exercice 2.81 *On peut supposer que* $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ *grâce à la commutativé de la somme. On a*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (a + \omega_k b) &= \sum_{k=0}^{n-1} a + b \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = na + b \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k \\ &= na + b \frac{1 - \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = na \end{aligned}$$

Ainsi par l'inégalité triangulaire

$$|na| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} (a + \omega_k b)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega_k b| \Longrightarrow |a| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega_k b|$$

On obtient de même que

$$|b| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|b+\omega_k a|$$

Mais

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}|b+\omega_k a| &= \sum_{k=0}^{n-1}\left|\omega_k\left(\frac{1}{\omega_k}b+a\right)\right| = \sum_{k=0}^{n-1}|\omega_k|\left|\frac{1}{\omega_k}b+a\right| = \sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{1}{\omega_k}b+a\right| \\ \text{car } |\omega_k| &= 1\end{aligned}$$

Il reste à prouver que

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|a+\frac{1}{\omega_k}b\right| = \sum_{j=0}^{n-1}|a+\omega_j b|$$

Or

$$\frac{1}{\omega_k} = \frac{1}{e^{\frac{2ki\pi}{n}}} = \frac{e^{\frac{2ni\pi}{n}}}{e^{\frac{2ki\pi}{n}}} = e^{\frac{2(n-k)i\pi}{n}}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|a+\frac{1}{\omega_k}b\right| = \sum_{k=0}^{n-1}\left|a+e^{\frac{2(n-k)i\pi}{n}}b\right|$$

Lorsque k *décrit* $0,...,n-1$,*le terme* ω_k *décrit* $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{n-1}$ *alors que* $\dfrac{1}{\omega_k}$ *décrit* $\omega_n=\omega_0,\omega_{n-1},\cdots,\omega_1$ *(présence de* $n-k$*). Cela se voit en posant* $j=n-k$ *dans la somme* $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left|a+e^{\frac{2(n-k)i\pi}{n}}b\right|$, *on a alors*

$$\begin{aligned} 0 &\leq k \leq n-1 \Longrightarrow 1\leq j\leq n \\ \sum_{k=0}^{n-1}\left|a+e^{\frac{2(n-k)i\pi}{n}}b\right| &= \sum_{j=1}^{n}\left|a+e^{\frac{2ji\pi}{n}}b\right| = \left|a+e^{\frac{2ni\pi}{n}}b\right| + \sum_{j=1}^{n-1}\left|a+e^{\frac{2ji\pi}{n}}b\right| \\ &= |a+b| + \sum_{j=1}^{n-1}\left|a+e^{\frac{2ji\pi}{n}}b\right| \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\left|a+e^{\frac{2ji\pi}{n}}b\right| \quad (\omega_n=\omega_0)\end{aligned}$$

On a donc

$$|b| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|a+\omega_k b|$$

et en sommant les deux inégalités le résultat demandé.

Exercice 2.82 *Par analyse-synthèse.*
Analyse, soient a *et* b *tels que* $\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$, *alors*

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$$

En posant $S=a+b$ *et* $P=ab$, *on obtient* $S^2=P$. *Ainsi* a *et* b *sont solutions de* $X^2-SX+S^2=0$. *Les solutions de cette équation sont* $X=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}S$. *On a donc (symétrie des rôles)* $a=-jS$ *et* $b=-j^2S$ *où* $S\in\mathbb{C}^*$ *(on ne peut avoir*

$S = a + b = 0$).
Synthèse. Soient $S \in \mathbb{C}^*$, on pose $a = -jS$ et $b = -j^2 S$, alors $a + b = -\left(j + j^2\right) S = S$ et

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{-1}{jS} + \frac{-1}{j^2 S} = \frac{-j^2}{S} + \frac{-j}{S} = \frac{-\left(j^2 + j\right)}{S} = \frac{1}{S} = \frac{1}{a+b}$$

Conclusion, les solutions sont de la forme

$$a = -jS \text{ et } b = -j^2 S \text{ où } S \in \mathbb{C}^*$$

Exercice 2.83 *On fonce ...,*

$$\begin{aligned}
\left(|m+1| + |m-1|\right)^2 &= |m+1|^2 + |m-1|^2 + 2\left|m^2 - 1\right| \\
&= (m+1)\left(\overline{m} + 1\right) + (m-1)\left(\overline{m} - 1\right) + 2\left|m^2 - 1\right| \\
&= 2|m|^2 + 2 + 2\left|m^2 - 1\right|
\end{aligned}$$

Mais $z^2 + 2mz + 1 = (z+m)^2 + 1 - m^2$ d'où

$$(a+m)^2 = m^2 - 1 \Longrightarrow |a+m|^2 = (a+m)\left(\overline{a} + \overline{m}\right) = |a|^2 + |m|^2 + a\overline{m} + \overline{a}m = \left|m^2 - 1\right|$$

et de même

$$|b|^2 + |m|^2 + b\overline{m} + \overline{b}m = \left|m^2 - 1\right|$$

En sommant ces deux dernières égalités, on obtient

$$|a|^2 + |b|^2 + 2|m|^2 + (a+b)\overline{m} + \left(\overline{a} + \overline{b}\right) m = 2\left|m^2 - 1\right|$$

Mais $a + b = -2m$ d'où $(a+b)\overline{m} + \left(\overline{a} + \overline{b}\right) m = -4|m|^2$ et ainsi

$$2\left|m^2 - 1\right| = |a|^2 + |b|^2 - 2|m|^2$$

On en déduit que

$$\left(|m+1| + |m-1|\right)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2 = \left(|a| + |b|\right)^2 \text{ car } ab = 1 \text{ donc } |a|\,|b| = 1$$

et c'est gagné (deux nombres positifs ayant même carré sont égaux).

4 Les olympiques

Exercice 2.84 *Posons $a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$ et $c = e^{i\gamma}$. Par hypothèse on a $a+b+c = 0$ mais aussi $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c} = 0$. Puisque a, b et c sont de module 1, on a $\overline{a} = \frac{1}{a}$, $\overline{b} = \frac{1}{b}$ et $\overline{c} = \frac{1}{c}$. Ainsi $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc} = 0 \Longrightarrow bc+ac+ab = 0$. Mais alors $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(bc+ac+ab) = 0$. En considérant les parties réelles et imaginaires, on obtient le résultat demandé.*

Exercice 2.85 *On a*

$$2a|z| - |z+a|^2 \le \left| |2az| - \left|(z+a)^2\right| \right| \le \left|2az - (z+a)^2\right| = \left|z^2 + a^2\right| \le a$$

d'après la seconde inégalité triangulaire. On en déduit que

$$2a|z| \le a + |z+a|^2 \le a + a^2 \Rightarrow |z| \le \frac{1+a}{2} \le a$$

car $a \ge 1$.

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

Exercice 2.86 *Dans le même style que le précédent. On a*

$$\left|z^2+a\right| = \left|(z+a)^2 + a - 2az - a^2\right| \leq a$$

et d'après la seconde inégalité triangulaire

$$2a\,|z| - \left|a^2 - a - (z+a)^2\right| \leq \left|2az + a^2 - a - (z+a)^2\right|$$

d'où

$$2a\,|z| \leq a + \left|a^2 - a - (z+a)^2\right|$$

Or

$$\left|a^2 - a - (z+a)^2\right| \leq \left|a^2-a\right| + |z+a|^2 \underset{a\geq 1}{=} a^2 - a + |z+a|^2 \leq 2a^2 - a$$

Ainsi

$$2a\,|z| \leq a + 2a^2 - a = 2a^2 \Rightarrow |z| \leq a$$

Exercice 2.87 *Notons a, b, c les racines de P et A, B, C les points d'affixes a, b et c respectivement. On commence par chercher une caractérisation des triangles isocèles en A.*
Le triangle est rectangle isocèle en a si et seulement si $|b-a| = |c-a|$ et $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$. On en déduit que

$$(ABC) \text{ rectangle isocèle en } A \Longleftrightarrow b - a = \varepsilon i\,(c-a) \text{ où } \varepsilon = \pm 1$$

Cette condition traduit le fait que $\overrightarrow{AB}$ est l'image de $\overrightarrow{AC}$ par la rotation de centre A et d'angle $\pm\dfrac{\pi}{2}$ suivant que le triangle est direct ou non.
On suppose que le triangle (ABC) est rectangle isocèle, et quitte à permuter B et C, on suppose qu'il est direct. Ainsi $b - a = i\,(c-a)$. On peut factoriser P et obtenir $P(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$. En développant P, on a

$$P(z) = z^3 - (a+b+c)\,z^2 + (ab+bc+ca)\,z - abc$$

(c.f. cours sur les relations coefficients-racines qui sera fait plus tard)
Ainsi $a+b+c=0$, $ab+ac+bc=p$ et $abc=-q$.
On obtient le système

$$\begin{aligned} a+b+c &= 0 && (2.5)\\ ab+ac+bc &= p && (2.6)\\ abc &= -q && (2.7)\\ b &= a + i\,(c-a) && (2.8) \end{aligned}$$

En reportant b dans (2.5), on obtient $c = a\dfrac{-2+i}{1+i} = \dfrac{a\,(-2+i)\,(1-i)}{2} = \dfrac{1+3\varepsilon i}{2}a$, puis donne $b = -c-a = -\dfrac{1-3i}{2}a$.
On reporte les valeurs de b et c trouvées dans (2.6) et (2.7), ce qui donne

$$\begin{aligned} -q &= a^3 \times \frac{1+3i}{2} \times \frac{1-3i}{2} = \frac{a^3}{4}\,|1+3i|^2 = \frac{5}{2}a^3\\ p &= a\,(b+c) + bc = -a^2 + \frac{5}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2 \end{aligned}$$

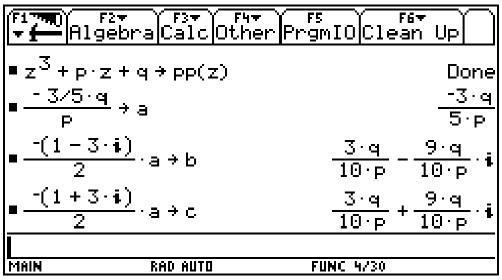
D'où $a^6 = \frac{8}{27}p^3 = \frac{4}{25}q^2$. On a donc une CN

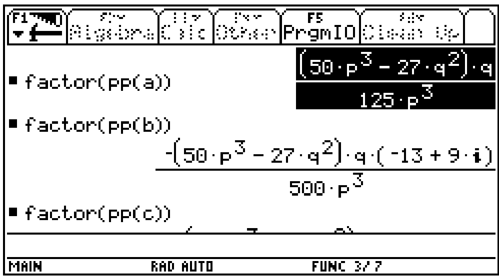
$$p^3 = \frac{27}{50}q^2$$

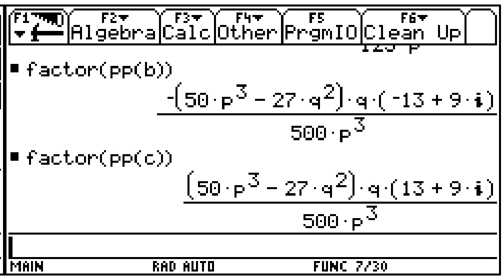
Cette condition est-elle suffisante ?
Supposons que $p^3 = \dfrac{27}{50}q^2$.

Si $q=0$ alors $p=0$ et $P(z)=z^3$ admet une racine triple nulle (il y a un triangle réduit à un point donc isocèle)
Si $q\neq 0$, posons $a=-\dfrac{3}{5}\dfrac{q}{p}$, $b=-\dfrac{1-3i}{2}a$, $c=-\dfrac{1+3i}{2}a$ car dans l'analyse précedente, on a $a^3=-\dfrac{2}{5}q$ et $a^2=\dfrac{2}{3}p$ et le choix de $\varepsilon=1$ ou $\varepsilon=-1$ revient à permuter a et b (ce qui est raisonnable car dans un triangle isocèle, deux sommets jouent le même rôle). Calculons alors $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$. Pour cela on utilise notre Ti préférée. On trouve alors

$$\begin{aligned}
P(a) &= -\frac{\left(27q^2-50p^3\right)q}{125p^3}=0\\
P(b) &= \left(27q^2-50p^3\right)\frac{(-13+9i)\,q}{500p^3}=0\\
P(c) &= \left(27q^2-50p^3\right)\frac{(-13-9i)\,q}{500p^3}=0
\end{aligned}$$





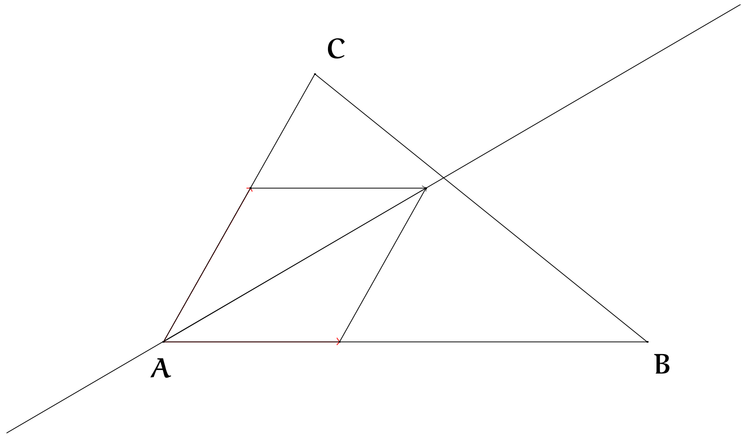


De plus $b-a=-\dfrac{1-3i}{2}a-a=-\dfrac{3}{2}a+\dfrac{3}{2}ia$ et $c-a=-\dfrac{1+3i}{2}a-a=-\dfrac{3}{2}a-\dfrac{3}{2}ia$, d'où $b-a=i(c-a)$ et le triangle est rectangle isocèle en $A(a)$.
***Remarque :** rien n'empêche p et q d'être des complexes.*

Exercice 2.88 *La solution est basée sur la remarque suivante. Soient A, B et C trois points deux à deux distincts. Le*

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

vecteur $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} + \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$ *dirige la bissectrice de l'angle* $\angle BAC$.



On commence par supposer que $z \notin \mathbb{R}$, *car sinon* M, N *et* P *sont alignés. Puis, si* O *est le centre du cercle inscrit à* (MNP) *alors* $\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{u}} = 0$ *où*

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{MN}}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|} + \frac{\overrightarrow{MP}}{\left\|\overrightarrow{MP}\right\|} \text{ a pour affixe } u = \frac{z^2 - z}{|z^2 - z|} + \frac{z^3 - z}{|z^3 - z|}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{u}{z-0} \quad &= \quad \frac{u}{z} \in \mathbb{R} \\
&\iff \quad \frac{(z-1)}{|z|\,|z-1\,|z+1||}\left(1 + \frac{(z+1)}{|z+1|}\right) \in \mathbb{R} \\
&\iff \quad (z-1)\left(1 + \frac{(z+1)}{|z+1|}\right) \in \mathbb{R} \\
&\iff \quad z + \frac{z^2}{|z+1|} = \overline{z} + \frac{\overline{z}^2}{|z+1|} \\
&\iff \quad (z - \overline{z})\left(|z+1| + z + \overline{z}\right) = 0
\end{aligned}$$

Comme on a supposé que $z \notin \mathbb{R}$, *on obtient la première condition*

$$|z+1| + 2\,\mathrm{Re}\,(z) = 0 \tag{2.9}$$

De même si O *est le centre du cercle inscrit à* (MNP) *alors* $\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{v}} = 0$ *où*

$$\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{NM}}{\left\|\overrightarrow{NM}\right\|} + \frac{\overrightarrow{NP}}{\left\|\overrightarrow{NP}\right\|} \text{ a pour affixe } u = \frac{z - z^2}{|z - z^2|} + \frac{z^3 - z^2}{|z^3 - z^2|}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{v}{z^2} &= \frac{(z-1)}{|z|\,|1-z|}\left(\frac{1}{|z|}-\frac{1}{z}\right)\in\mathbb{R}\\ &\iff (z-1)\left(1-\frac{|z|}{z}\right)\in\mathbb{R}\\ &\iff z+\frac{|z|}{z}=\overline{z}+\frac{|z|}{\overline{z}}\\ &\iff (z-\overline{z})\left(1-\frac{1}{|z|}\right)\end{aligned}$$

Ainsi z est de module 1. Or (2.9) s'écrit

$$\sqrt{z\overline{z}+2\operatorname{Re}(z)+1}+2\operatorname{Re}(z)=\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{Re}(z)+1}+2\operatorname{Re}(z)=0$$

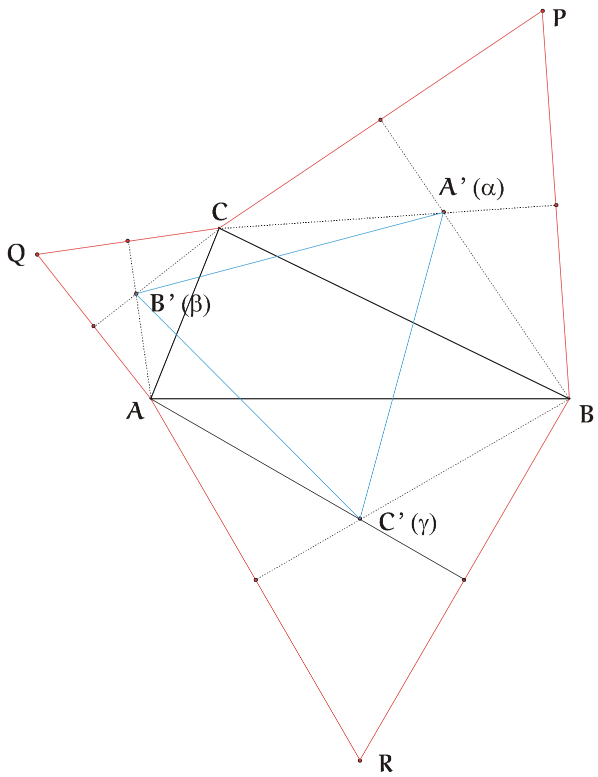
On résout donc

$$\sqrt{1+u}+u\sqrt{2}=0\iff\left\{\begin{array}{c}1+u=2u^2\\ \text{et } u\leq 0\end{array}\right.\iff\operatorname{Re}(z)=-\frac{1}{2}$$

Les seules solutions possibles sont donc $z=j$ ou $z=j^2$. Ces solutions conviennent car dans ces deux cas le triangle (MNP) est équilatral ; le centre du cercle inscrit coïncide avec le centre du cercle circonscrit, qui est O.

Exercice 2.89 *Avec les notations du schéma ci dessous, on détermine les affixes de P,Q et R (affixes notés p,q et r). On passe de B à P par une rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc*

$$p-c=e^{i\varepsilon\frac{\pi}{3}}(b-c)$$



$$p-c=-j^2(b-c)\Longrightarrow p=\left(1+j^2\right)c-bj^2=-bj^2-cj$$

De même

$$\begin{aligned}q &= -cj^2-aj\\ r &= -aj^2-bj\end{aligned}$$

(on passe de p à q en remplaçant b par c et c par a).
On en déduit que, si α, β et γ sont les affixes de A', B' et C'

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{p+b+c}{3} = \frac{-bj^2 - cj + b + c}{3} = \frac{1-j}{3}\left(c - j^2 b\right) \\ \beta &= \frac{1-j}{3}\left(a - j^2 c\right) \\ \gamma &= \frac{1-j}{3}\left(b - j^2 a\right) \end{aligned}$$

On vérifie que

$$\gamma - \alpha = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(\beta - \alpha\right) = -j^2\left(\beta - \alpha\right)$$

ce qui est simple car

$$\begin{aligned} \gamma - \alpha &= \frac{1-j}{3}\left(-j^2 a + \left(1 + j^2\right) b - c\right) \\ &= \frac{1-j}{3}\left(-j^2 a - jb - c\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \frac{1-j}{3}\left(a + j^2 b - \left(j^2 + 1\right) c\right) \\ &= \frac{1-j}{3}\left(a + j^2 b + jc\right) \end{aligned}$$

(sans oublier que $j^3 = 1$ et $j^4 = j$)
Remarque : *On peut aussi utiliser le résultat de l'exercice 2.55 . Il s'agit alors de prouver que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ ce qui est équivalent à*

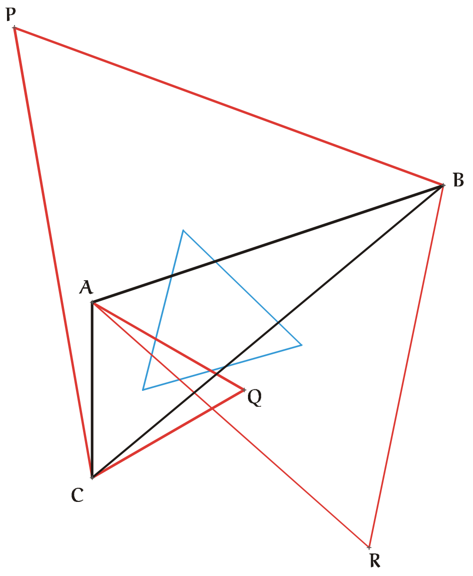
$$\left(c - j^2 b\right)^2 + \left(a - j^2 c\right)^2 + \left(b - j^2 a\right)^2 = \left(c - j^2 b\right)\left(a - j^2 c\right) + \left(a - j^2 c\right)\left(b - j^2 a\right) + \left(b - j^2 a\right)\left(c - j^2 b\right)$$

Il suffit de vérifier que les termes en a^2 et en ab sont les mêmes (par symétrie des rôles), ce qui est simple.
Enfin

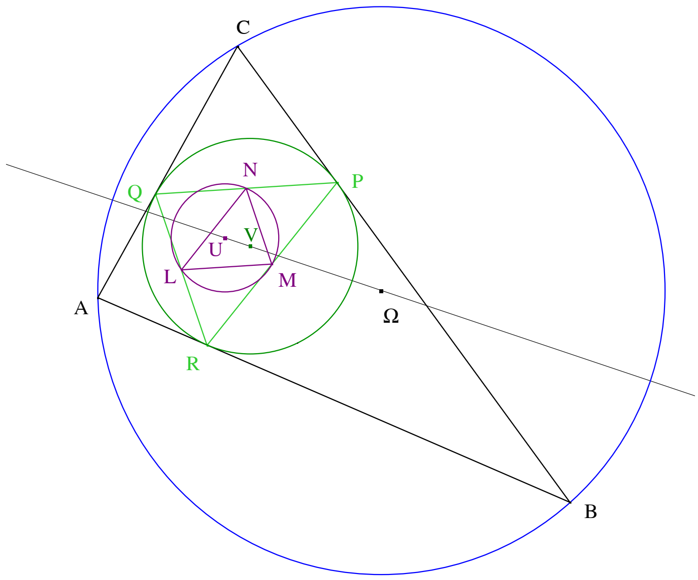
$$\begin{aligned} \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} &= \frac{1-j}{9}\left(c - j^2 b + a - j^2 c + b - j^2 a\right) \\ &= \frac{(1-j)\left(1 - j^2\right)}{9}(b + c + a) \\ &= \frac{(b + c + a)}{3} \end{aligned}$$

car $(1-j)\left(1-j^2\right) = 1 - j - j^2 + j^3 = 3$. Les isobarycentres de (ABC) et de $(A'B'C')$ sont les mêmes.
Remarque : *On peut également considérer une configuration semblable au schéma suivant, le résultat est alors le*

même.



Exercice 2.90



1. *La première remarque à faire est que* $|p| = |q| = |r| = 1$*, et ainsi* $\overline{p} = \dfrac{1}{p}$, $\overline{q} = \dfrac{1}{q}$ *et* $\overline{r} = \dfrac{1}{r}$*. Ensuite, on a* $(AQ) \perp (QV) \iff \dfrac{q-a}{q} \in i\mathbb{R}$ *et* $(AR) \perp (RV) \iff \dfrac{r-a}{r} \in i\mathbb{R}$*. On en déduit le système*

$$\left\{\begin{array}{l}(q-a)\,\overline{q} = -\left(\overline{q}-\overline{a}\right)q \\ (r-a)\,\overline{r} = -\left(\overline{r}-\overline{a}\right)r\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}(q-a)\,\dfrac{1}{q} = -\left(\dfrac{1}{q}-\overline{a}\right)q \\ (r-a)\,\dfrac{1}{r} = -\left(\dfrac{1}{r}-\overline{a}\right)r\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}a + q^2\overline{a} = 2q \\ a + r^2\overline{a} = 2r\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}a = 2\dfrac{qr}{q+r} \\ \overline{a} = \dfrac{2}{q+r}\end{array}\right.$$

Remarque : *on a donc*

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right),\ a \text{ est la moyenne harmonique de } q \text{ et } r$$

De même

$$b=\frac{2pr}{p+r},\ c=\frac{2pq}{p+q}$$

2. *On calcule* $|\omega-p|$ *or*

$$\begin{aligned}\omega-p &= \frac{2pqr\,(p+q+r)}{(p+q)\,(q+r)\,(r+p)}-\frac{2qr}{q+r}=\frac{2qr}{(q+r)}\left(\frac{p\,(p+q+r)}{(p+q)\,(r+p)}-\frac{(p+q)\,(q+r)}{(p+q)\,(q+r)}\right)\\ &= -\frac{2q^2r^2}{(p+q)\,(r+q)\,(r+p)}\end{aligned}$$

d'où

$$|\omega-p|=|\omega-q|=|\omega-r|=\frac{2}{|p+q|\,|q+r|\,|r+p|}\ \text{ car }\ |q|=|r|=1$$

par symétrie des rôles, et Ω *est bien le centre du cercle circonscrit à* PQR *.*

3. *On a*

$$\left|u-\frac{q+r}{2}\right|=\left|u-\frac{p+r}{2}\right|=\left|u-\frac{p+q}{2}\right|$$

Quelques secondes de réflexion, un peu d'inspiration mathématique, et on devine que

$$u=\frac{p+q+r}{2}$$

Remarque : *En fait* U *est le centre du cercle d'Euler de* PQR*.*

4. *En déduire que* U, V *et* Ω *sont alignés.*
On a

$$\frac{\omega-0}{u-0}=\frac{4pqr}{(p+q)\,(q+r)\,(r+p)}$$

il suffit de prouver que ce complexe est réel. Or

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{pqr}{(p+q)\,(q+r)\,(r+p)}\right)} &= \frac{\frac{1}{pqr}}{\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{p}\right)}\\ &= \frac{pqr}{(p+q)\,(q+r)\,(r+p)}\end{aligned}$$

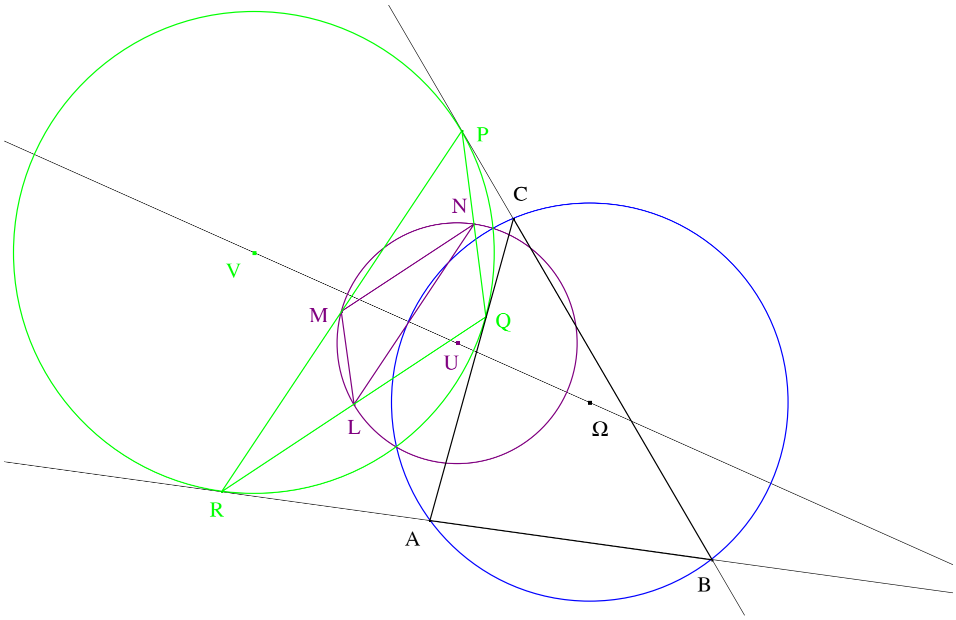
ce qui prouve l'alignement.
Remarque : *De plus*

$$\begin{aligned}\left|\frac{\omega}{u}\right| &= \frac{\Omega V}{UV}=\frac{4}{|p+q|\,|q+r|\,|r+p|}=2\,|\omega-p|=2R\\ &\quad \text{où } R \text{ est le rayon du cercle circonscrit à } ABC\end{aligned}$$

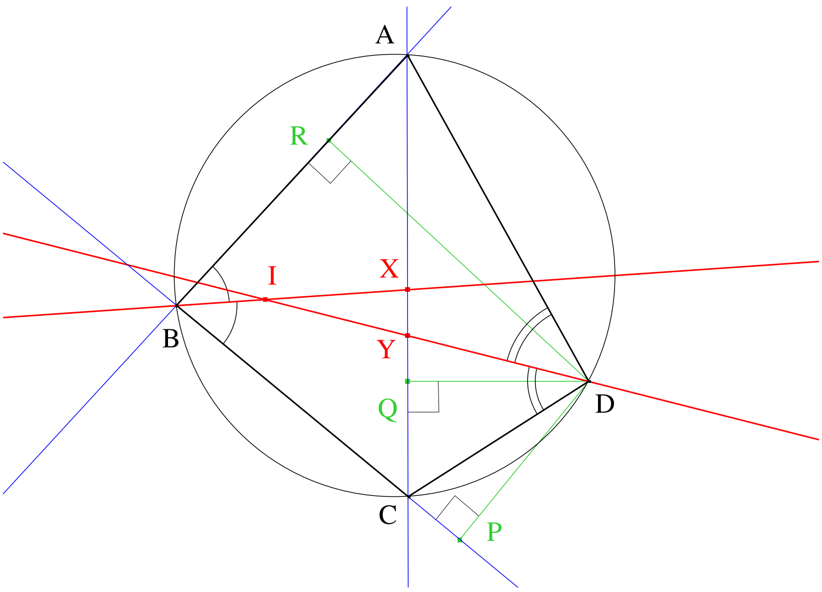
Attention , on a supposé que le rayon du cercle inscrit à (ABC) *est égal à 1, la remarque précédente, dans le cas général se traduit ainsi :* $\dfrac{\Omega V}{UV}=2\dfrac{R}{r_i}$ *où* r_i *est le rayon du cercle inscrit.*

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

Remarque : *Le résultat demeure pour les centres des cercles exinscrits.*



Exercice 2.91



On place l'origine du plan complexe au centre cu cercle circonscrit au quadrilatère $(ABCD)$. *On peut alors supposer, sans perte de généralité, que les affixes* a, b, c *et* d *(des points* $A, B\cdots$*) sont des complexes de module* 1 *(donc* $\overline{a} = \dfrac{1}{a}\cdots$*). On détermine ensuite l'affixe* p *du point* P. *On sait que* $(DP) \perp (BC)$ *et que* B, C, P *sont alignés. On en déduit que*

$$\frac{p-d}{c-b} \in i\mathbb{R} \text{ et } \frac{p-b}{c-b} \in \mathbb{R}$$

ainsi p *et* $\overline{p}$ *sont solutions du système*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{p-d}{c-b}=-\overline{\left(\dfrac{p-d}{c-b}\right)}=-\dfrac{\overline{p}-\dfrac{1}{d}}{\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}}=\dfrac{bc}{d}\dfrac{d\overline{p}-1}{c-b} \\ \dfrac{p-b}{c-b}=\overline{\left(\dfrac{p-b}{c-b}\right)}=-\dfrac{\overline{p}-\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}}=-c\dfrac{b\overline{p}-1}{c-b} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} p-bc\overline{p} & =d-\dfrac{bc}{d} \\ p+bc\overline{p} & =c+b \end{array}\right.$$

d'où

$$p=\frac{1}{2}\left(d-\frac{bc}{d}+c+b\right)=\frac{1}{2}\frac{d^2+bd+cd-bc}{d}$$

De même

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2}\frac{d^2+ad+cd-ac}{d} \\ r &= \frac{1}{2}\frac{d^2+ad+bd-ab}{d} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} PQ &= |q-p|=\frac{1}{2}\left|ad-bd+bc-ac\right|=\frac{1}{2}\left|b-a\right|\left|d-c\right| \\ &= \frac{1}{2}AB\cdot CD \text{ car } |d|=1 \\ QR &= |r-q|=\frac{1}{2}\left|b-c\right|\left|d-a\right|=\frac{1}{2}AC\cdot BD \end{aligned}$$

Soient maintenant X *et* Y *les points d'intersections des bissectrices de* $\angle ABC$ *et de* $\angle ADC$ *avec la droite* (AC) *. C'est un résultat classique que de prouver que* X *est le barycentre de* A *et* C *affectés des coefficients les longueurs* BC *et* AB*. On peut l'établir avec la règle des sinus (exercice) mais aussi avec les complexes. En effet un vecteur directeur de la bissectrice de* $\angle ABC$ *est*

$$\overrightarrow{u}=\frac{\overrightarrow{BA}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|}+\frac{\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$$

dont l'affixe est

$$u=\frac{a-b}{|a-b|}+\frac{c-b}{|c-b|}=\frac{(a-b)\left|c-b\right|+\left|a-b\right|(c-b)}{\left|a-b\right|\left|c-b\right|}$$

Soit x *l'affixe du barycentre de* $((A,|c-b|),(C,|a-b|))$ *alors*

$$x=\frac{a\left|c-b\right|+b\left|a-b\right|}{|c-b|+|a-b|}$$

donc

$$\begin{aligned} x-b &= \frac{a\left|c-b\right|+c\left|a-b\right|}{|c-b|+|a-b|}-b=\frac{(a-b)\left|c-b\right|+\left|a-b\right|(c-b)}{|a-b|+|c-b|} \\ \text{et } \frac{x-b}{u} &= \frac{|a-b|\left|c-b\right|}{|a-b|+|c-b|}\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

ce qui prouve que X *est sur la bissectrice de* $\angle ABC$*. De même l'affixe de* Y*, notée* y *est*

$$y=\frac{a\left|c-d\right|+c\left|a-d\right|}{|c-d|+|a-d|}$$

Pour finir (car, sincèrement, où cela nous conduit-il ?),

$$\begin{aligned} y-x &= \frac{a\,|c-d|+c\,|a-d|}{|c-d|+|a-d|}-\frac{a\,|c-b|+b\,|a-b|}{|c-b|+|a-b|} \\ &= \frac{(|c-d|\,|a-b|-|c-b\,|a-d||)}{(|c-d|+|a-d|)\,(|c-b|+|a-b|)}\,(a-c) \end{aligned}$$

ce qui donne (ouvrez un peu les yeux) avec les longeurs des côtés du quadrilatère

$$XY=\frac{1}{2}\frac{PQ-QR}{(AD+DC)\,(AB+BC)}AC$$

En conclusion $X=Y \iff PQ=QR$ ce qui prouve le résultat demandé.

Remarque 1 *En fait, un calcul plus approfondi, avec Maple, montre que le résultat demeure même si le quadrilatère n'est pas inscriptible.*

Exercice 2.92 *Tout réside dans le choix de l'origine du plan complexe. On choisit l'origine du plan complexe au centre du cercle circonscrit à (ABC). On choisit également le repère orthonormé de manière à ce que le vecteur $\overrightarrow{i}$ d'affixe 1 dirige la droite (D). Sans perte de généralité, on peut également supposer que les affixes a,b et c de A,B et C sont des complexes de module 1.*

Quelques minutes suffisent pour se convaincre que les affixes de A',B' et C' sont $a'=-\overline{a}=-\dfrac{1}{a},-\overline{b}=-\dfrac{1}{b}$ et $\overline{c}=-\dfrac{1}{c}$ respectivement. Soit p l'affixe du point P (p est aussi de module 1) et a'' l'affixe de A'', l'alignement de A'',B et C se traduit par

$$\begin{aligned} \frac{a''-b}{c-b}\in\mathbb{R} &\iff (a''-b)\left(\overline{c}-\overline{b}\right)=\left(\overline{a''}-\overline{b}\right)(c-b) \\ &\iff (a''-b)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)=\left(\overline{a''}-\frac{1}{b}\right)(c-b) \\ &\iff \frac{a''}{bc}+\overline{a''}=\frac{1}{c}+\frac{1}{b} \end{aligned}$$

Quand à l'alignement entre A',P et A'', il donne

$$\begin{aligned} \frac{a''-p}{a'-p}\in\mathbb{R} &\iff (a''-p)\left(\overline{a'}-\overline{p}\right)=\left(\overline{a''}-\overline{p}\right)(a'-p) \\ &\iff (a''-p)\left(a+\frac{1}{p}\right)=\left(\overline{a''}-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{a}+p\right) \\ &\iff \frac{a''}{p}-\frac{\overline{a''}}{a}=1-\frac{1}{pa} \\ &\iff \frac{aa''}{p}-\overline{a''}=a-\frac{1}{p} \end{aligned}$$

en sommant les deux expressions obtenues, on a

$$a''\left(\frac{1}{bc}+\frac{a}{p}\right)=\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+a-\frac{1}{p}$$

$$a''=\frac{p\,(abc+b+c)-bc}{p+abc}$$

De même (permutation des rôles)

$$\begin{aligned} b'' &= \frac{p\,(abc+a+c)-ac}{p+abc} \\ c'' &= \frac{p\,(abc+a+b)-ab}{p+abc} \end{aligned}$$

Il reste à vérifier l'alignement des points A'', B'' et C'', i.e. à vérifier que

$$\frac{c''-a''}{b''-a''} \in \mathbb{R}$$

or

$$\frac{c''-a''}{b''-a''} = \frac{(p-b)(a-c)}{(p-c)(a-b)} = \frac{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)}{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)} = \overline{\left(\frac{(p-b)(a-c)}{(p-c)(a-b)}\right)}$$

Remarque 2 *En fait, comme le laisse voir la figure, la droite $(A''C'')$ est parallèle à (D). On le prouve en constatant que*

$$c''-a'' = \frac{(p-a)(b-c)}{p+abc} \in \mathbb{R}$$

(preuve banale, on passe au conjugué$\cdots$)

Remarque 3 *On a de plus montré que*

$$\frac{A''C''}{A''B''} = \frac{BP}{CP} \times \frac{AC}{AB}$$

Remarque 4 *Pour $p = -abc$, les trois points A'', B'' et C'' n'existent pas, en effet dans ce cas la droite (PA') est parallèle à (BC) ce que traduit*

$$\frac{p+\frac{1}{a}}{b-c} = \frac{\frac{1}{a}-abc}{b-c} = \frac{1-a^2bc}{a(b-c)} \in \mathbb{R}$$

de même $(PB') \parallel (AC)$ et $(PC') \parallel (AB)$. Dans ce cas, si l'on trace la perpendiculaire à (D) passant par A, elle coupe le cercle en un point J. Le point P est alors tel que (JP) est perpendiculaire à (BC).

Remarque 5 *Que se passe-t-il si le point P coincide avec A' ? Si l'on fait tendre p vers $a' = -\frac{1}{a}$, alors a'' tend vers $\alpha = \frac{2abc+b+c}{1-a^2bc}$. On peut vérifier qu'alors*

$$\frac{\alpha - a'}{-a'} = \frac{a^2bc+ab+ac+1}{1-a^2bc} \in i\mathbb{R}$$

ce que traduit le fait que la droite $(A'A'')$ est la tangente en A' au cercle circonscrit à (ABC). Bien sur cela n'a pas de sens si $a^2bc = 1$ (ce qui correspond à $p + abc = 0$).

Exercice 2.93 *En posant $a = \sqrt{x}$ et $b = \sqrt{y}$ le système s'écrit alors*

$$\left\{\begin{array}{l} a\left(1+\dfrac{1}{a^2+b^2}\right) = 2 \\ b\left(1-\dfrac{1}{a^2+b^2}\right) = 3 \end{array}\right. \underset{L_1+iL_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} a\left(1+\dfrac{1}{a^2+b^2}\right) = 2 \\ z+\dfrac{1}{z} = 2+3i \end{array}\right. \quad \text{où } z = a+ib$$

En effet, on a $\overline{z} = a - ib$ et $|z|^2 = z\overline{z} = a^2 + b^2$ ainsi

$$\frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z}$$

On résout donc l'équation $z^2 - (2+3i)z + 1 = 0$. On a $\Delta = (2+3i)^2 - 4 = -9 + 12i$, on cherche alors δ tel que $\delta^2 = \Delta$. On pose $\delta = u + iv$, où $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\left\{\begin{array}{c} u^2 - v^2 = -9 \\ 2uv = 12 > 0 \\ u^2 + v^2 = |\Delta| = \sqrt{81+144} = 15 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2u^2 = 6 \\ 2v^2 = 24 \\ uv \text{ de même signe} \end{array}\right.$$

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

On choisit donc $\delta = \sqrt{3}\,(1+2i)$, *les solutions de* (E) *sont alors*

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2+3i+\sqrt{3}+2\sqrt{3}i}{2} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+1\right) + i\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right) \\ z_2 &= \frac{2+3i-\sqrt{3}-2\sqrt{3}i}{2} = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}+1\right) + i\left(-\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi puisque $a = \operatorname{Re}(z)$ *et* $b = \operatorname{Im}(z)$, *on obtient deux couples de solutions pour* a *et* b

$$\begin{aligned} (a,b) &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+1, \sqrt{3}+\frac{3}{2}\right) \\ &\text{ou} \\ (a,b) &= \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}+1, -\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

On remarque que l'on passe de l'un à l'autre en remplaçant $\sqrt{3}$ *par* $-\sqrt{3}$. *On a alors deux couples solutions pour* x *et* y *en élevant au carré (on ne calcule que les carrés du premier couple, puis on remplace* $\sqrt{3}$ *par* $-\sqrt{3}$ *pour avoir l'autre couple). On obtient*

$$\begin{aligned} (x,y) &= \left(\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+1\right)^2, \left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)^2\right) = \left(\sqrt{3}+\frac{7}{4}, 3\sqrt{3}+\frac{21}{4}\right) \\ &\text{ou} \\ (x,y) &= \left(-\sqrt{3}+\frac{7}{4}, -3\sqrt{3}+\frac{21}{4}\right) \end{aligned}$$

Remarque : *Cet exercice m'a été inspiré du sujet des Olympiades du Vietnam de 1996, le sujet original était*

$$\text{résoudre} \begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right) = \dfrac{4\sqrt{2}}{7} \end{cases}$$

qui conduit à une équation beaucoup moins agréable$\cdots$

Exercice 2.94 *Posons* $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, *alors d'après le binôme de Newton*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}\left(z+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(z+\omega^k\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n}\omega^{jk}z^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{jk}\right)\binom{n}{j}z^{n-j} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}\omega^{jk} &= \frac{1-\left(\omega^j\right)^n}{1-\omega^j} \text{ si } \omega^j \neq 1 \\ &= \frac{1-(\omega^n)^j}{1-\omega^j} = 0 \end{aligned}$$

On isole donc les cas où $\omega^j = 1$, *ce qui correspond à* $j = 0$ *ou* $j = n$. *Ainsi*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}\left(z+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n &= \sum_{j=0 \text{ ou } j=n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}1\right)\binom{n}{j}z^{n-j} \\ &= n\binom{n}{0}z^{n-0} + n\binom{n}{n}z^{n-n} = n\left(z^n+1\right) \end{aligned}$$

Il reste à appliquer cette formule de manières astucieuses.
Avec $z = 1$*, on a*

$$\begin{aligned}\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n &= \left(2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)^n \\ &= 2^n\cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{ik\pi} = (-1)^k 2^n \cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Remarque : *Ce résultat est à mettre en parallèle avec la célèbre formule*

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

qui se démontre facilement ainsi : On part de $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$ *que l'on dérive en* $nX^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1}\prod_{\substack{k=0\\ j\neq k}}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$. *Avec* $X = 1$*, il vient*

$$n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{n}e^{\frac{ik\pi}{n}} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}e^{\frac{ik\pi}{n}}$$

Il suffit de passer au module en remarquant que $\sin\dfrac{k\pi}{n} > 0$ *si* $1 \leq k \leq n-1$.
Avec $z = e^{\frac{i\pi}{n}}$ *(une racine deuxième de* ω*, i.e une racine ènième de* -1*), on obtient*

$$\begin{aligned} e^{\frac{i\pi}{n}} + e^{\frac{2ik\pi}{n}} &= e^{\frac{i\pi}{n}} + e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 2\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} \\ \left(z + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n &= 2^n\cos^n\frac{(2k-1)\pi}{2n}e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2}} \\ &= 2^n\cos^n\frac{(2k-1)\pi}{2n}e^{ik\pi}e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= 2^n i(-1)^k\cos^n\frac{(2k-1)\pi}{2n}\end{aligned}$$

Ainsi

$$2^n i\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n\frac{(2k-1)\pi}{2n} = n(-1+1) = 0$$

d'où le résultat.

Exercice 2.95

1. *On a*

$$(1-z)\,p(z) = a_0 + (a_1 - a_0)\,z + \cdots + (a_n - a_{n-1})\,z^n + a_n z^{n+1}$$

ainsi

$$\begin{aligned} |a_0| &= \left|(1-z)\,p(z) - \left[(a_1-a_0)\,z + \cdots + (a_n - a_{n-1})\,z^n + a_n z^{n+1}\right]\right| \\ &\leq |(1-z)\,P(z)| + \left|(a_1-a_0)\,z + \cdots + (a_n-a_{n-1})\,z^n + a_n z^{n+1}\right| \\ &\leq |(1-z)\,P(z)| + |(a_1-a_0)\,z| + \cdots + |(a_n-a_{n-1})\,z^n| + \left|a_n z^{n+1}\right| \\ &\leq |(1-z)\,P(z)| + \left[(a_0-a_1)\,|z| + (a_1-a_2)\,|z|^2 + \cdots + (a_{n-1}-a_n)\,|z|^n + a_n\,|z|^{n+1}\right]\end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. *Les fonctions* $x \mapsto x^k$ *sont strictement croissantes et les coefficients* $a_k - a_{k+1}$, a_{n+1} *sont positifs, la fonction* f *est donc décroissante strictement.*
3. *On a donc pour* $|z| < 1$, $f(|z|) > f(1) = a_0 - [(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) + a_n] = 0$, *ce qui prouve qu'il n'y a pas de racines dans* D.
4. *Pour* $a_k = 1$, *on* $p(z) = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ *si* $z \neq 1$ *et* $p(1) = n + 1$, *les racines sont des racines énièmes de l'unité qui sont bien à l'extérieur (au bord) de* D.
5. *On applique le résultat à* $p(z) = Q(r_1 z)$ *et à* $p(z) = z^n p\left(\dfrac{r_2}{z}\right)$.
Avec $Q(z) = 1 + \cdots + z^n$, *on retrouve bien que les racines sont toutes de module* 1.

Exercice 2.96 *On sait que* $\left|z^2 - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$ *ce qui équivaut (puisque les nombres sont des réels positifs) à*

$$\left|z^2 - \frac{1}{2}\right|^2 \leq \frac{1}{4}$$

soit à

$$\left(z^2 - \frac{1}{2}\right)\left(\overline{z}^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} \leq 0 \Longleftrightarrow |z|^4 - \operatorname{Re}\left(z^2\right) \leq 0$$

Or

$$\operatorname{Re}\left(z^2\right) = 2\operatorname{Re}(z)^2 - |z|^2$$

On obtient donc

$$\operatorname{Re}(z)^2 \geq \frac{|z|^2\left(|z|^2 + 1\right)}{2}$$

On veut prouver que

$$\left|z - \frac{1}{3}\right|^2 - \frac{4}{9} < 0 \Longleftrightarrow \left(z - \frac{1}{3}\right)\left(\overline{z} - \frac{1}{3}\right) - \frac{4}{3} \leq 0$$

soit

$$|z|^2 - \frac{2}{3}\operatorname{Re}(z) - \frac{1}{3} \leq 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Re}(z) \geq \frac{3|z|^2 - 1}{2}$$

sachant que $\operatorname{Re}(z) > 0$.
Ou bien $3|z|^2 - 1 < 0$ *et c'est alors vrai, ou bien cela revient à*

$$\operatorname{Re}(z)^2 \geq \left(\frac{3|z|^2 - 1}{2}\right)^2$$

Il suffit donc de prouver que pour $|z|^2 \geq \dfrac{1}{3}$ *on a* $\dfrac{|z|^2\left(|z|^2 + 1\right)}{2} \geq \left(\dfrac{3|z|^2 - 1}{2}\right)^2$ *soit en posant* $x = |z|^2$ *que*

$$\frac{x(x+1)}{2} \geq \left(\frac{3x - 1}{2}\right)^2 \Longleftrightarrow 7x^2 - 8x + 1 \leq 0$$

A priori, aucune chance que cela soit vrai, il manque donc une information. Cette information c'est que

$$\operatorname{Re}(z) \leq |z|$$

donc on a

$$\frac{|z|^2\left(|z|^2 + 1\right)}{2} \leq |z|^2 \Longleftrightarrow \frac{|z|^2\left(|z|^2 + 1\right)}{2} - |z|^2 \leq 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}|z|^2\left(|z| - 1\right)\left(|z| + 1\right) \leq 0$$

donc

$$|z| \leq 1$$

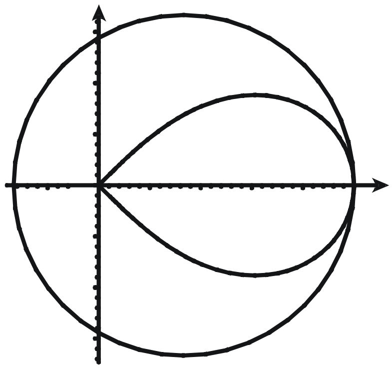
Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009

On est donc amené à prouver que pour $x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$, *on a bien*

$$7x^2 - 8x + 1 \leq 0$$

ce qui est facile car les racines de $7x^2 - 8x + 1$ *sont* 1 *et* $\frac{1}{7}$.

Remarque : Géométriquement la condition $\left|z^2 - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$ *et* $\mathrm{Re}\,(z)$ *implique que* $M\,(z)$ *est à l'intérieur de la boucle droite de la lemniscate d'équation polaire* $r = \sqrt{\cos 2t}$*Alors que* $\left|z - \frac{1}{3}\right| < \frac{2}{3}$ *implique que* $M\,(z)$ *est dans le cercle de centre* $A\left(\frac{1}{3}\right)$ *et de rayon* $\frac{2}{3}$. *On vient de prouver que la demi-lemniscate est incluse dans ce cercle.*



Exercice 2.97 *On pose* $A = \dfrac{\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|}{1 + \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|}$, $B = \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|$, $C = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$*et* $g\,(z) = \dfrac{|z|}{1 + |z|}$ *alors*

$$\begin{aligned} g\,(z) &= \frac{1 + |z| - 1}{1 + |z|} = 1 - \frac{1}{1 + |z|} \\ B &\leq \sum_{k=1}^{n} |z_k| \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{1 + B} \geq \frac{1}{1 + C} \Longrightarrow A = g\,(B) \leq 1 - \frac{1}{1 + C} = g\,(C) = \frac{\sum_{k=1}^{n} |z_k|}{1 + \sum_{k=1}^{n} |z_k|}$$

Puis,

$$g\,(x + y) = 1 - \frac{1}{1 + |x + y|}$$

$$1 + |x + y| \leq 1 + |x| + |y| \Longrightarrow 1 - \frac{1}{1 + |x + y|} \leq 1 - \frac{1}{1 + |x| + |y|} = \frac{|x| + |y|}{1 + |x| + |y|}$$

d'où

$$\frac{|x + y|}{1 + |x + y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x| + |y|} + \frac{|y|}{1 + |x| + |y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |x|}$$

ainsi

$$g\,(x + y) \leq g\,(x) + g\,(y)$$

et par récurrence

$$A=\frac{\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|}{1+\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|}\leq g\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|\right)\leq\sum_{k=1}^{n}g\left(z_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{|z_k|}{1+|z_k|}$$

Géry Huvent - Epsilon Maths -(c) 2009